SOYUT MATEMATİK

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

İki Önermenin Denkliği

Örnek: p ve q herhangi iki önerme olduğuna göre $(p \vee q) \wedge p' \equiv p' \wedge q$ olduğunu gösterin.

p	q	p'	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge p'$	$p' \wedge q$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0

Temel Özellikler =

Teorem: p, q, r herhangi önermeler; f doğru bir önermeyi, t'de yanlış bir önermeyi göstermek üzere aşağıdaki özellikler vardır:

1- $p \vee p \equiv p$ ($\vee$'nın ayrılık, tek kuvvet özelliği.)

2- $p \wedge p \equiv p$ ($\wedge$'nin " " " ".)

3- $p \vee q \equiv q \vee p$ ($\vee$'nın değişme özelliği.)

4- $p \wedge q \equiv q \wedge p$ ($\wedge$'nin " ".)

5- $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ ($\vee$'nın birleşme özelliği.)

6- $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ ($\wedge$'nin " ".)

7- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ($\wedge$ nin $\vee$ üzerine dağılma özelliği.) soldan

8- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ($\vee$'nın $\wedge$ " " ".) soldan.

9- $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ ($\vee$'nın $\wedge$ " " ".) sağdan

10- $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ ($\wedge$ nin $\vee$ " " ".) sağdan

11- $(p \vee t) \equiv p$, $p \vee f \equiv f$ ($\vee$'nın özdeşlik özellikleri.)

12- $p \wedge t \equiv t$, $p \wedge f \equiv p$ ($\wedge$ nin " ".)

13- $p \vee p' \equiv f$ ($\vee$'nın tanlama özelliği.)

14- $p \wedge p' \equiv t$ ($\wedge$ nin " ".)

15- $(p')' \equiv p$ ($'$ in " ".)

16- $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ ($\vee$'nın Demorgan özelliği)

17- $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ ($\wedge$ nin " ")

ispat // $p \vee p \equiv p$

p	p	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

ispat // $p \vee q \equiv q \vee p$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

t: yanlış

f = doğru

ispat // $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

f	p	q	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

ispat // $p \wedge t \equiv t$

p	t	$p \wedge t$
1	0	0
1	0	0
0	0	0
0	0	0

ispat // $p \vee t \equiv p$

p	t	$p \vee t$
1	0	1
1	0	1
0	0	0
0	0	0

ispat // $p \vee f \equiv f$

p	f	$p \vee f$
1	1	1
1	1	1
0	1	1
0	1	1

ispat // $p \wedge f \equiv p$

p	f	$p \wedge f$
1	1	1
1	1	1
0	1	0
0	1	0

ispat // $(p')' \equiv p$

p	p'	$(p')'$
1	0	1
0	1	0

ispat // $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

p	q	$(p \vee q)'$	p'	q'	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

ispat // $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

p	q	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

Teorem: p ve q herhangi iki önerme olmak üzere

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$$

ispat //

p	q	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Teorem: p ve q iki ön. olsun.

ispat // $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

$$(p \Rightarrow q) \equiv (p' \vee q) \text{ (Teoremden)}$$
$$\equiv (q \vee p') \text{ ($\vee$ nın değişme öz.)}$$
$$\equiv (q')' \vee p' \text{ (önerme öz.)}$$
$$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p') \text{ (Teoremden)}$$

Problemler:

① Aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk tablolarını düzenleyin.

a) $(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$

p	q	r	$p \vee r$	$p \Rightarrow q$	$(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0

b) $(p \Rightarrow p) \vee (p \Rightarrow p')$

p	p'	$p \Rightarrow p'$	$(p \Rightarrow p)$	$\vee$	$(p \Rightarrow p')$
1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1

c) $[q' \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow p'$

p	q	p'	$q' \wedge (p \Rightarrow q)$	$\Rightarrow p'$	$[q' \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

d) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

p	q	r	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$f(x)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

e) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$(p \Rightarrow q)$	$(q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)]$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

② "p: Havalar soğuktur." "q: Yağmur yağıyor." olduğuna göre, aşağıdaki önermeleri düzgün birer cümleyle ifade edin;

a- p': Havalar soğuk değildir.

b- $p \wedge q$ Havalar soğuk ve yağmur yağıyor.

c- $p \vee q$ Havalar soğuk veya yağmur yağıyor.

d- $q \Rightarrow p$ Yağmur yağdığı için havalar soğuk.

e- $p \Rightarrow q'$ Havalar soğuk ise yağmur

f- $q \vee p'$: Yağmur yağıyor veya havalar soğuk değil.

g- $p' \vee q'$: Havalar soğuk değil veya yağmur yağmıyor

h- $p' \Rightarrow q'$: Havalar soğuk değilse yağmur yağmıyor.

i- $(q')'$: Yağmurun yağmadığı doğru değildir.

k- $(p \wedge q') \Rightarrow p$: Havalar soğuk ve yağmur yağmıyor ise havalar

③ p: "O uzun boyludur." q: "O esmerdir" ise aşağıdakileri ifade ediniz:

a- O uzun boylu ve esmerdir. $(p \wedge q)$

b- Onun kısa boylu ve esmer olduğu doğru değildir. $(p' \wedge q)' \equiv p \vee q'$

c- O ne uzun boyludur ne de esmerdir. $p' \wedge q'$

④ Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin,

a) Eğer $3+2=7$ ise $4+4=8$ dir. $p' \Rightarrow q \longrightarrow 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ //

b) $2+2=5$ in doğru olması için gerek ve yeter şartın $4+4=10$ olduğu doğru değildir.

$(p' \Leftrightarrow q')' \longrightarrow (0 \Leftrightarrow 0)' \equiv 0$ //

c) Samsun, Marmara Bölgesindedir. Ya da Karadeniz Bölgesi Türkiye'nin batısındadır.

$(p' \vee q') \longrightarrow (0 \vee 0) \equiv 0$ //.

⑤ Aşağıdaki bileşik önermeleri, önerme özelliklerinden yararlanarak en basit şekilde yazın,

a- $(p \vee q')' \equiv p' \wedge q$

~~b-~~ $(p' \Rightarrow q)' \equiv \cancel{p \Rightarrow q'}$

c- $(p \wedge q')' \equiv p' \vee q \equiv q \vee p' \equiv (q')' \vee p'$

$\equiv q \Rightarrow p' \equiv p \Rightarrow q$

d- $(p' \wedge q')' \equiv (p \vee q)$

~~e-~~ $(p' \Leftrightarrow q)' \equiv \cancel{p \Leftrightarrow q'}$

f- $(p' \Leftrightarrow q')' \equiv \cancel{p \Leftrightarrow q}$

⑥ Aşağıdaki önermeleri değişik biçimlerde ifade edin;

a) Havanın yağmurlu ve soğuk olduğu doğru değildir. $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

b) Kar yağıyor ise hava soğuktur önermesi doğru değildir. $(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$

c) "Gülün kırmızı olması için gerek ve yeter şart menekşenin mor olmasıdır" önermesi doğru değildir. $(p \Leftrightarrow q)'$

⑤ b- $(p' \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv (p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

ⓔ $(p' \Leftrightarrow q)' \equiv [(p' \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p')]' \equiv [((p')' \vee q) \wedge (q' \vee p')]' \equiv [(p \vee q) \wedge (q' \vee p')]'$

$\equiv (\underbrace{p' \wedge q'}_{r}) \vee (q \wedge p)$

$\equiv r \vee (q \wedge p) \equiv (r \vee q) \wedge (r \vee p)$

$\equiv [(p' \wedge q') \vee q] \wedge [(p' \wedge q') \vee p]$

$\equiv [(p' \vee q) \wedge (q' \vee q)] \wedge [(p' \vee p) \wedge (q' \vee p)]$

$\equiv [(p' \vee q) \wedge f] \wedge [f \wedge (q' \vee p)]$

$\equiv (p' \vee q) \wedge (q' \vee p) \equiv p \Leftrightarrow q$

Soru // $p \Rightarrow q \not\equiv q \Rightarrow p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Soru // $p \Rightarrow (q \vee r) \overset{?}{\equiv} (p \Rightarrow q) \vee r$

p	q	r	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

Soru // $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \not\equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

Soru // $p' \Leftrightarrow q'$ uyuşma mıdır?

p	q	p'	q'	$p' \Leftrightarrow q'$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

totoloji

$p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$

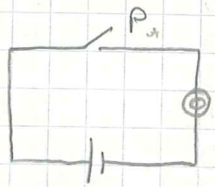
$$p' \Leftrightarrow q' \equiv (p' \Rightarrow q') \wedge (q' \Rightarrow p') \equiv [(p')' \vee q') \wedge ((q')' \vee p')]$$

$$\equiv (p \vee q') \wedge (q \vee p') \equiv (q \vee p') \wedge (p \vee q') \equiv (p' \vee q) \wedge (q' \vee p) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$\equiv p \Leftrightarrow q$$

Önermelerin Elektrik Devrelerine Uygulanması :

En basit bir elektrik devresinde; bir anahtar —/— bir lamba ⊙ akım kaynağı |1| vardır.



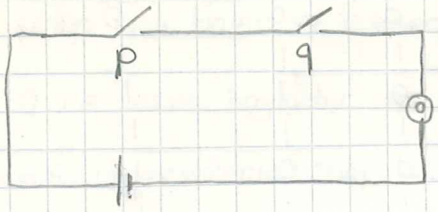
p: "P anahtarı kapalıdır" "Devreden akım geçer" "Lamba yanar" doğru ise,

"P anahtarı açıktır" devreden "akım geçmez" lamba yanmaz" önermeleri de yanlıştır.

$p \Rightarrow q$ nun doğruluk değeriyle ifade edilir.

Seri Bağlı Devreler :

p ve q gibi iki anahtar bulunan bir devreyi düşünelim.



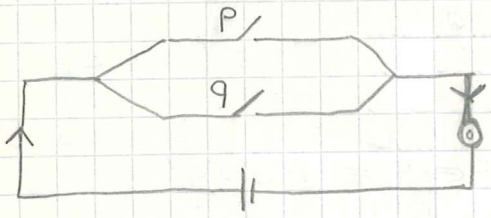
$p \wedge q$ nun doğru olduğu zaman lamba yanar

aksi halde lamba yanmaz.

p	q	$p \wedge q$	
1	1	1	→ yanar
1	0	0	yanmaz.
0	1	0	
0	0	0	

Paralel Bağlı Devreler :

p ve q gibi iki anahtar bulunan bir devreyi düşünelim.



$p \vee q$ doğru ise lamba yanar

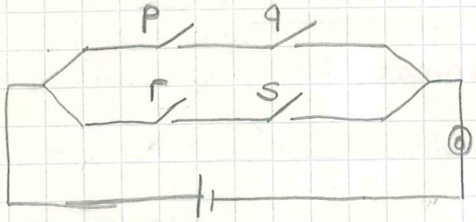
aksi halde lamba yanmaz.

p	q	$p \vee q$	
1	1	1	yanar
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	→ yanmaz.

Karışık Devreler :

Bir devrede, seri ve paralel bağlı anahtar varsa karışık devredir.

Soru



$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ p

Lambanın yanması için gerek ve yeter şart nedir?

p	q	r	s	$p \wedge q$	$r \wedge s$	$(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$	
1	1	1	1	1	1	1	geçer
1	1	1	0	1	0	1	
1	1	0	1	1	0	1	
1	1	0	0	1	0	1	
1	0	1	1	0	1	1	
1	0	1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	1	1	— geçer
0	1	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	1	1	— geçer
0	0	1	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	

Teoremler İçin İspat Yolları :

Teoremler $P \Rightarrow q$ ve $P \Leftrightarrow q$ şeklinde olur. P hipotez, q hükümdür.

İki ispat metodu vardır.

a- Tümevarım metodu (ilkesi).

b- Tümdengelim " ".

Teorem (Tümdengelim İlkesi)

P, q, r herhangi üç önerme olmak üzere $(P \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$ bileşik önermesinin doğru olduğu durumlarda $P \Rightarrow q$ önermesi de doğrudur.

P	q	r	$P \Rightarrow r$	$r \Rightarrow q$	$(P \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$		$P \Rightarrow q$
1	1	1	1	1	1	$\Longleftrightarrow$	1
1	1	0	0	1	0		1
1	0	1	1	0	0		0
1	0	0	0	1	0		0
0	1	1	1	1	1	$\Longleftrightarrow$	1
0	1	0	1	1	1	$\Longleftrightarrow$	1
0	0	1	1	0	0		1
0	0	0	1	1	1	$\Longleftrightarrow$	1

Tümdengelim ilkesinden faydalanarak teoremler iki türlü ispatlanır.

1- Doğrudan ispat

2- Dolaylı ispat

Doğrudan İspat :

$P \Rightarrow q$ teoremi veriliyor. Bu teoremin doğruluğunu ispatlamak istersek,

$P \Rightarrow r_1$, (özellik tanım teorem ...) (P nin doğruluğundan r_1 doğru önermesi)

$r_1 \Rightarrow r_2$, (.....) (r_1 in " r_2 " ")

$r_2 \Rightarrow r_3$, (.....) (r_2 nin " r_3 " ")

⋮

$r_{n-1} \Rightarrow r_n$ (.....) (r_{n-1} in " r_n " ")

$r_n \Rightarrow q$

$(P \Rightarrow r_1 \wedge r_1 \Rightarrow r_2) \Rightarrow (P \Rightarrow r_2)$ de doğrudur.

$(P \Rightarrow r_2 \wedge r_2 \Rightarrow r_3) \Rightarrow (P \Rightarrow r_3)$ "

⋮

$(P \Rightarrow r_n \wedge r_n \Rightarrow q) \Rightarrow (P \Rightarrow q)$ de doğrudur.

Teoremler İçin İspat Yolları :

Teoremler $p \Rightarrow q$ ve $p \Leftrightarrow q$ şeklinde olur. p hipotez, q hükümdür.

İki ispat metodu vardır.

a- Tümevarım metodu (ilkesi).

b- Tümdengelim " ".

Teorem (Tümdengelim İlkesi)

p, q, r herhangi üç önerme olmak üzere $(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$ bileşik önermesinin doğru olduğu durumlarda $p \Rightarrow q$ önermesi de doğrudur.

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$r \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$		$p \Rightarrow q$
1	1	1	1	1	1	$\Longleftrightarrow$	1
1	1	0	0	1	0		1
1	0	1	1	0	0		0
1	0	0	0	1	0		0
0	1	1	1	1	1	$\Longleftrightarrow$	1
0	1	0	1	1	1	$\Longleftrightarrow$	1
0	0	1	1	0	0		1
0	0	0	1	1	1	$\Longleftrightarrow$	1

Tümdengelim ilkesinden faydalanarak teoremler iki türlü ispatlanır.

1- Doğrudan ispat

2- Dolaylı ispat

Doğrudan İspat :

$p \Rightarrow q$ teoremi veriliyor. Bu teoremin doğruluğunu ispatlamak istersek,

$p \Rightarrow r_1$, (özellik tanım teorem .....) (p nin doğruluğundan r_1 doğru önermesi)

$r_1 \Rightarrow r_2$, (.....) (r_1 in " r_2 " ")

$r_2 \Rightarrow r_3$, (.....) (r_2 nin " r_3 " ")

$\vdots$

$r_{n-1} \Rightarrow r_n$ (.....) (r_{n-1} in " r_n " ")

$r_n \Rightarrow q$

$(p \Rightarrow r_1 \wedge r_1 \Rightarrow r_2) \Rightarrow (p \Rightarrow r_2)$ de doğrudur.

$(p \Rightarrow r_2 \wedge r_2 \Rightarrow r_3) \Rightarrow (p \Rightarrow r_3)$ "

$\vdots$

$(p \Rightarrow r_n \wedge r_n \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ de doğrudur.

Örnek// n doğal sayısı tek ise n^2 doğal sayısı da tektir.

$n=2k+1$

İspat n tek ise $n=2k+1$ (teksayı tanımı)

$n=2k+1 \Rightarrow n^2=(2k+1)^2$ (n yerine değeri yazılarak)

$n^2=(2k+1)^2 \Rightarrow n^2=4k^2+4k+1$ (Doğal sayılarda çarpma işlemi)

$n^2=4k^2+4k+1 \Rightarrow n^2=2(2k^2+2k)+1$ (ortak çarpan parantezine alma)

$n^2=2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2=2r+1$ ($r=2k^2+2k$ yazılarak)

$n^2=2r+1 \Rightarrow n^2$ tek sayıdır (tek sayı teoremi)

n tek ise n^2 tektir.

Dolaylı İspat :

1) $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ olmayana ergi metodu ile ispat.

Örnek $3x+2 \neq 5$ ise $2x+3 \neq 5$ doğrulugunu ispatlayınız ?
p $\Rightarrow$ q

q' : $2x+3=5 \Rightarrow 3x+2=5$: p'

$2x+3=5 \Rightarrow 2x+3=2+3$ (Doğal sayılarda toplama)

$2x+3=2+3 \Rightarrow 2x=2$ (Doğal sayılarda sadeleştirme)

$2x=2 \Rightarrow x=1$ (" " çarpma işlemi sadeleştirme öz.)

$x=1 \Rightarrow 3x=3$ (" " çarpma, her iki taraf 3 ile çarp.)

$3x=3 \Rightarrow 3x+2=3+2$ (iki tarafı 2 ile toplamak)

$3x+2=3+2 \Rightarrow 3x+2=5$ (toplama işlemi)

$3x+2 \neq 5 \Rightarrow 2x+3 \neq 5$

2) $(p \Rightarrow q) \equiv p' \vee q \equiv ((p')' \wedge q')' \equiv (p \wedge q')'$

$p \Rightarrow q$ nun doğrulugunu ispatlama yerine, $p \wedge q'$ in yanlış oldugunu ispatlarsak, teoremin doğrulugunu ispatlamış oluruz.

$p \wedge q' \equiv r \wedge r'$ Çelişki bulma yöntemi.

Örnek // $\underset{p}{2x+3=5}$ ise $\underset{q}{3x+2=5}$ olduğunu ispatlayınız?

$p \Rightarrow q$

$p \wedge q' : (2x+3=5 \wedge 3x+2 \neq 5)$

$\Rightarrow (2x+3=2+3) \wedge (3x+2 \neq 3+2)$ (Toplama işleni)

$\Rightarrow (2x=2) \wedge (3x \neq 3)$ (Top. iş. sad. öz)

$\Rightarrow (x=1) \wedge (x \neq 1)$ (çarp. iş. sad. öz)

$p \Rightarrow q$ doğru $p \wedge q'$ yanlıştır.

Bir Önermenin Yanlış Olduğunu Gösterme :

① $p \Rightarrow q$ veriliyor. Aksine bir örnek bulma metodu.

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

$(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$

Örnek // Bir doğal sayı 6 ve 4 ile bölünürse bu doğal sayı 24 ile de bölünür.

60 $\quad 6/60$ ve $4/60 \quad 24 \nmid 60$ olduğu için yanlış.

$p: 6/60 \wedge 4/60$ doğrudur.

$q: 24/60$ yanlıştır.

$q': 24 \nmid 60$ doğrudur. $\quad p \wedge q'$ doğrudur.

$(p \wedge q')'$ yanlıştır, $p \Rightarrow q$ yanlıştır.

② Çelişki bulma metodu :

$p \Rightarrow q$ veriliyor.

$p \Rightarrow q$ (1. sonuç)

p nin doğruluğundan faydalanarak doğru olduğu bilinen bir r_1 önermesi elde edelim. $p \Rightarrow r_1$

r_1'in doğruluğundan, r_2 doğru önermesi elde ediliyor. $r_1 \Rightarrow r_2$

$p \Rightarrow r_1$, $r_1 \Rightarrow r_2$, $r_2 \Rightarrow r_3$, ..., $r_n \Rightarrow r$

$\Rightarrow p \Rightarrow r$ doğrudur. (2. sonuç)

$p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow r$

<u>Sonuç</u> : $p \Rightarrow q$ doğru değildir.

Örnek// "Bir doğal sayı tek ise, karesi çift sayıdır" önermesinin yanlış olduğunu ifade ediniz?

n doğal sayı, n^2 karesi olsun.

$n=2k+1$ tek ise, $n=2k$ çift ise.

İspat// $\underset{p}{n \text{ tek}} \Rightarrow \underset{q}{n^2 \text{ çifttir}}$ doğru olsun. (1. sonuç)

n tek $\Rightarrow n=2k+1$ (Tek doğal sayı tanımı)

$n=2k+1 \Rightarrow n^2=(2k+1)^2$ (n yerine değeri yazılarak)

$n^2=(2k+1)^2 \Rightarrow n^2=4k^2+4k+1$ (Doğal sayılarda çarpma işlemi tanımı)

$n^2=4k^2+4k+1 \Rightarrow n^2=2(2k^2+2k)+1$ (Ortak parantez)

$n^2=2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2=2k'+1$ ($2k^2+2k=k'$ yazılarak)

$n^2=2k'+1 \Rightarrow n^2$ tek sayıdır (Tek sayı tanımı)

n tek $\Rightarrow n^2$ tektir. (2. sonuç)

Sonuç: n tek ise n^2 çifttir önermesi yanlıştır.

Problemler:

1- Aşağıdaki önermelerin yanlış olduğunu ispat edin.

a) n doğal sayısı tek ise asaldır.

b) n doğal sayısı asal ise tektir.

2- Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu ispat edin.

a) n doğal sayısı çift ise $(n+1)$ tektir.

b) $(n+1)$ doğal sayısı tek ise n çifttir.

c) $(m+n)$ doğal sayısı tek ise m veya n doğal sayısı tektir.

3- Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin.

a) Her teoremin karşıtı da doğrudur.

b) Her teoremin tersi de doğrudur.

c) Her teoremin karşıt-tersi de doğrudur.

① a- p: $n=9$ tektir.

q: $n=9$ asaldır. q': $n=9$ asal değildir.

$p \wedge q'$: $n=9$ "tektir ve asal değildir" doğrudur.

$(p \wedge q')' \equiv p \Rightarrow q$ yanlıştır.

"$n=9$ tek ise asaldır" yanlıştır.

b- p: $n=9$ asaldır.

q: $n=9$ tektir. q': $n=9$ tek değildir.

$p \wedge q'$: $n=9$ asaldır ve tek değildir.

$(p \wedge q')' \equiv p \Rightarrow q$ yanlıştır.

"$n=9$ asal ise tektir" yanlıştır.

② a- p: n doğal sayısı çifttir.

q: $(n+1)$ " " tektir.

n çift $\Rightarrow$ $n=2k$ (çift sayı tanımı)

$n=2k \Rightarrow (n+1)=2k+1$ (yerine yazarak)

$(n+1)=2k+1 \Rightarrow n+1$ tek sayıdır. (Tek sayı tanımı)

n çift $\Rightarrow$ $n+1$ tek sayıdır.

c- p: $(m+n)$ doğal sayısı tektir.

q: m veya n doğal sayısı tektir.

$p \Rightarrow q$: $(m+n)$ tek ise m veya n tektir.

i)) m çift olsun. $m=2r$

$m+n$ tek $\Rightarrow (m+n)=2k+1$ (Tek sayı tanımı)

$(m+n)=(2k+1) \Rightarrow 2r+n=2k+1$ ($m=2r$ yazılarak)

$2r+n=2k+1 \Rightarrow n=2k+1-2r$ (n çözülerek)

$n=2k+1-2r \Rightarrow n=2(k-r)+1$ (Çarpanlara ayırma)

$n=2(k-r)+1) \Rightarrow n$ tek sayıdır.

KÜME Herhangi bir topluluktur. (=cümle)

Kümeler, A, B, C..... gibi büyük harflerle gösterilir.

Meydana getirdiği topluluk, kümelerin elemanlarıdır. Elemanlar a, b, c gibi küçük harflerle gösterilir. Kümelerin elemanlarıyla gösterilmesi iki türlüdür.

1- Liste yöntemi (açık gösterim). $\{\ldots, \ldots, \ldots\}$

Örnek// Türkiye'nin E harfiyle başlayan illerinin kümesi,

$\{$Edirne, Eskişehir, Elazığ, Erzurum, Erzincan$\}$

2- Özellik yöntemiyle Gösterimi: $\{X : X$ in sağladığı özellikler$\}$

(kapalı gösterimi.)

Örnek// $\{X : X$ E harfiyle başlayan bir il$\}$

Örnek// $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$A = \{X : X$ bir doğalsayı $1 \leq x \leq 7\}$

$A = \{X : X$ bir doğal sayı $0 < x^2 < 50\}$

- Eğer bir a elemanı bir A kümesine aitse, $a \in A$, "a eleman A" şeklindedir.
- " " " " " ait değilse, $a \notin A$ "a eleman değil A" dır.

İki Kümenin Eşitliği:

A ve B iki küme olsun. A ve B kümeleri aynı elemanlardan kurulmuşsa, iki kümeye eşittirler denir ve $A = B$ yazılır.

Örnek// $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ $B = \{X : X$ bir doğal sayı $1 \leq x \leq 7\}$ $A = B$ dir.

Alt Küme:

A ve B kümeleri verilsin.

$A \subset B$ veya $B \supset A$, A'nın her bir elemanı B'nin de elemanı ise, A kümesi B nin alt kümesidir. (B, A'yı kapsar.)

$A \not\subset B$, $B \not\supset A$ değilidir.

$A \subseteq B \Rightarrow$ ($A = B$ veya $A \subset B$ doğru ise)

$B \supseteq A$

Eğer $A \neq B$ ve $A \subset B$ ise; A kümesi, B kümesinin has, (öz) alt kümesidir.

İki Kümenin Birleşimi :

A ve B kümeleri verilsin.

$A \cup B$: "A birleşim B" (A ve B de bulunan elemanlarla oluşan yeni küme.)

$A \cup B = \{x : x \in A$ veya $x \in B\}$

İki Kümenin Kesişimi :

A ve B iki küme olmak üzere A ve B de ortak olan elemanların oluşturduğu yeni kümeye, iki kümenin kesişimi (arakesiti) denir.

$A \cap B$ ile gösterilir.

$A \cap B = \{x : x \in A$ ve $x \in B\}$

Boş Küme :

Hiçbir elemanı olmayan kümeye denir. ϕ, $\{\ \}$ şeklinde gösterilir.

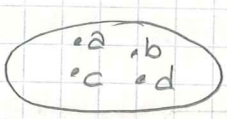
$\{x : x$'in sağladığı özellikler$\}$

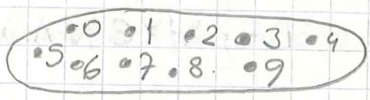
Örnek// $\{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 1 \wedge x \leq 1\} = \phi$

Venn Şeması

Bir kapalı şekil içine kümenin elemanları nokta halinde dizilir. Bu şekle Venn şeması denir.

Örnek// $A = \{a, b, c, d\}$ $\qquad$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$





Açık Önerme

İçinde değişken (ya da değişkenler) bulunan ve bir hüküm bildiren ifadelere (cümlelere) açık önerme denir. Eğer bir tek değişken varsa; $p(x)$, $q(x)$ ---- gibi 1- değişkenli açık önerme denir. 2 değişken varsa; $p(x,y)$, $q(x,y)$ ---- gibi 2- değişkenli açık önerme denir.

Örnek// 1- X tamsayısı sıfırdan büyüktür.

2- $x = 3$ ve $y = 2$ dir.

3- $x^2 + y^2 = 1$ dir. İfadeleri birer açık önermedir.

Açık önermeden anlamsız ifadeler elde edilmesini önlemek için değişkenler yerine yazılan ifadeler (değerler) bir kümeden alınır. Bu kümeye açık önermenin tanım kümesi denir.

Örnek // X herhangi bir doğal sayı olmak üzere "$x+2>7$" dir. İfadesi doğal sayılar kümesinde tanımlı bir açık önermedir.

$p(x): x+2>7$ dir.

$x=2$ için $p(2)$: "$4>7$" önermesi yanlıştır. Doğruluk değeri 0. dır

$x=8$ için $p(8)$: "$10>7$" önermesi doğrudur. " " 1 dir.

Tanım : Bir A kümesinde tanımlı bir $p(x)$ açık önermesi verilsin. Bu açık önermede x yerine yazıldığında hep doğru önermeler veren elemanların kümesine açık önermenin doğruluk kümesi denir.

Örnek // Doğal sayılar kümesinde tanımlı "$x+3>11$" açık önermesinin doğruluk kümesi nedir?

$$\underset{\text{değer}}{D} = \{9, 10, 11, \ldots\} \qquad \underset{\text{tanım}}{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Örnek // Doğal sayılar kümesinde tanımlı $x+5<3$ açık önermesinin doğruluk kümesi nedir?

$$D = \emptyset \qquad D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x+5<3\} = \emptyset$$

Niceleyiciler :

1- Evrensel Niceleyici : $p(x)$, A kümesinde tanımlı bir açık önerme olsun.

"Her $x \in A$ için $p(x)$ dir." ifadesi bir önermedir.

Bu önerme $p(x)$'den elde edilen tüm önermeler doğru ise doğru, aksi halde yanlıştır.

"Her $x \in A$ için $p(x)$ tir." "$\forall x \in A, p(x)$"

$\forall$: (Her) : Evrensel niceleyici.

Örnek // $\forall k \in \mathbb{N}$ için $2k+1$ tek sayıdır.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $2k+1$ tektir.

Örnek // "$\forall x \in \mathbb{N}$ için $x+4>3$" $D=\mathbb{N}$

Sonuç = 1- $D \neq A$ ise önerme (doğruluk değeri) 0 dır.

2- $D=A$ ise " " 1 dir.

Örnek // "$\forall x \in \mathbb{N}$ için $x+2>8$"

$D=\{7,8,9,\ldots\} \Rightarrow D \neq N$ yanlış bir önermedir.

2- Varlıksal Niceleyici = $p(x)$, A kümesinde tanımlı bir açık önerme olsun. "En az bir $x \in A$ için $p(x)$ tir" ifadesi de bir önermedir. Bu önerme $p(x)$ den elde edilen önermelerden en az biri doğru olduğunda doğru, aksi halde yanlıştır.

En az bir $\equiv$ bazı

"Bazı $x \in A$ için $p(x)$ dir" "$\exists x \in A, p(x)$"

$\exists$: (Bazı = en az bir) : Varlıksal niceleyici.

Sonuç 1- $D=\emptyset$ ise yanlıştır.

2- $D \neq \emptyset$ ise doğrudur.

Örnek // "Bazı insanlar gözlüklüdür"

$D \neq \emptyset$ doğrudur.

Örnek // "$\exists x \in \mathbb{N}$ için $(x-1)(x+2)=0$ dır"

$D \neq \emptyset$ doğrudur. $x=1$ veya $x=-2$ için bu önerme sıfırdır.

Niceleyiciler ve Bağlaçlar :

$A=\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ kümesinde tanımlı bir açık önerme $p(x)$ olsun.

"$\forall x \in A$ için $p(x)$" $\equiv [p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \ldots \wedge p(a_n)]$

"$\exists x \in A$ için $p(x)$" $\equiv [p(a_1) \vee p(a_2) \vee \ldots \vee p(a_n)]$

Niceleyicilerde Olumsuzluk

Teorem : A kümesinde tanımlı bir açık önerme $p(x)$ olsun.

a) $[\forall x \in A, p(x)]' \equiv [\exists x \in A, [p(x)]']$

b) $[\exists x \in A, p(x)]' \equiv [\exists x \in A, [p(x)]']$

İspat // a) i "$\forall x \in A, p(x)$" önermesi doğru ise $D=A$ doğrudur.

$\exists x \in A, [p(x)]'$ yanlıştır.

ii "$\forall x \in A,\ p(x)$" yanlış ise $D \neq A$

$\exists x \in A, [p(x)]'$ doğru olur.

$$[\forall x \in A, p(x)]' \equiv [\exists x \in A, [p(x)]']$$

b)

Niceleyicilerde Dağıtıcılık :

Teorem : Bir A kümesinde tanımlı iki açık önerme $p(x)$ ve $q(x)$ olsun.

a- $[\forall x \in A, [p(x) \wedge q(x)]] \equiv [[\forall x \in A, p(x)] \wedge [\forall x \in A, q(x)]]$

b- $[\exists x \in A, [p(x) \vee q(x)]] \equiv [[\exists x \in A, p(x)] \vee [\exists x \in A, q(x)]]$

İspat // $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$

ⓐ $[\forall x \in A, p(x) \wedge q(x)] \equiv [p(a_1) \wedge q(a_1)] \wedge [p(a_2) \wedge q(a_2)] \wedge \dots \wedge [p(a_n) \wedge q(a_n)]$

$\equiv [p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \dots p(a_n)] \wedge [q(a_1) \wedge q(a_2) \wedge \dots \wedge q(a_n)]$

$\equiv [\forall x \in A, p(x)] \wedge [\forall x \in A, q(x)]$ ($\wedge$ nin birleşme ve değişme öz.)

ⓑ $[\exists x \in A, [p(x) \vee q(x)] \equiv [p(a_1) \vee q(a_1)] \vee [p(a_2) \vee q(a_2)] \vee \dots \vee [p(a_n) \vee q(a_n)]$

$\equiv [p(a_1) \vee p(a_2) \vee \dots p(a_n)] \vee [q(a_1) \vee q(a_2) \vee \dots \vee q(a_n)]$

$\equiv [\exists x \in A, p(x)] \vee [\exists x \in A, q(x)]$ ($\vee$ nin birleşme ve değişme öz.)

Problemler :

1- $A = \{0,1,2,3,4\}$ ise A kümesinde tanımlanan, aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümesini bulun?

a) $x+3=10$ b) $x+3<5$ c) $x+3<10$ d) $x+3<7$

2- $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ise A kümesinde tanımlanan, aşağıdaki önermelerin yanlış olduğuna dair örnek verin?

a) $\forall x \in A,\ x+5<11$

b) $\forall x \in A,\ x^2>11$

c) $\forall x \in A$, x asaldır.

d) $\forall x \in A$, x tektir.

3- Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \geq x$

c) $\exists x \in \mathbb{R}, |x| = 0$

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = x$

4- Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin.

a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} = 1$

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} = 1$

c) $\forall x \in \mathbb{Z}, (x^2 = 2x)'$

d) $\exists x \in \mathbb{Z}, x = 2x$

5- $A = \{2,3,4,5\}$ ise aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin ve olumsuzlarını (değilini) bulun.

a) $\exists x \in A, x+3 = 10$

b) $\forall x \in A, x+3 < 10$

c) $\exists x \in A, x+3 < 5$

d) $\forall x \in A, x+3 \leq 7$

Çözümler:

1- a) $x+3=10$, $D = \emptyset$ boş küme. $x+1 \geq x \Rightarrow x+1 > x$ veya $x+1 = x$

b) $x+3 < 5$ $D = \{0,1\}$

c) $x+3 < 10$ $D = A$ doğru.

d) $x+3 < 7$ $D = \{0,1,2,3\}$

2- a) $\forall x \in A, x+5 < 11$, $x = 7$ ise $p(7): 12 < 11$ $D \neq A$ yanlış

b) $\forall x \in A, x^2 > 11$ $x = 3$ ise $P(3): 9 > 11$ $D \neq A$ yanlış.

c) $\forall x \in A$ x asaldır. $x = 9$ $D \neq A$ yanlış.

d) $\forall x \in A$ x tektir $x = 2$ ise $P(2) =$ çifttir $D \neq A$

3- a) $|x| = -x$ ise $D \neq A$ olur. yanlıştır.

b) $x+1 \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ doğrudur.

c) $\exists x \in \mathbb{R}$ $|x| = 0$ $x = 0$ ise $P(0): |x| = 0$ dır. doğrudur.

d) $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 = x$ doğrudur $\{0,1\}$ için.

4- a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} = 1$ sıfır için $\frac{0}{0}$ olduğu için yanlıştır. Doğruluk değeri 0 dır.

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} = 1$ doğrudur.

c) $\forall x \in \mathbb{Z}, (x^2 = 2x)' \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \neq 2x$ 2 için yanlıştır. Yanlış 0 dır.

d) $\exists x \in \mathbb{Z}, x = 2x$ doğrudur. $x = 0$ için.

3- Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \geq x$

c) $\exists x \in \mathbb{R}, |x| = 0$

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = x$

4- Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin.

a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} = 1$

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} = 1$

c) $\forall x \in \mathbb{Z}, (x^2 = 2x)'$

d) $\exists x \in \mathbb{Z}, x = 2x$

5- $A = \{2,3,4,5\}$ ise aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirtin ve olumsuzlarını (değilini) bulun.

a) $\exists x \in A, x+3 = 10$

b) $\forall x \in A, x+3 < 10$

c) $\exists x \in A, x+3 < 5$

d) $\forall x \in A, x+3 \leq 7$

Çözümler:

1- a) $x+3=10$, $D = \emptyset$ boş küme. $x+1 \geq x \Rightarrow x+1 > x$ veya $x+1 = x$

b) $x+3 < 5$ $D = \{0,1\}$

c) $x+3 < 10$ $D = A$ doğru.

d) $x+3 < 7$ $D = \{0,1,2,3\}$

2- a) $\forall x \in A, x+5 < 11$, $x = 7$ ise $P(7): 12 < 11$ $D \neq A$ yanlış

b) $\forall x \in A, x^2 > 11$ $x = 3$ ise $P(3): 9 > 11$ $D \neq A$ yanlış.

c) $\forall x \in A$ x asaldır. $x = 9$ $D \neq A$ yanlış.

d) $\forall x \in A$ x tektir $x = 2$ ise $P(2) =$ çifttir $D \neq A$

3- a) $|x| = -x$ ise $D \neq A$ olur. yanlıştır.

b) $x+1 \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ doğrudur.

c) $\exists x \in \mathbb{R}$ $|x| = 0$ $x = 0$ ise $P(0): |x| = 0$ dır. doğrudur.

d) $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 = x$ doğrudur $\{0,1\}$ için.

4- a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} = 1$ sıfır için $\frac{0}{0}$ olduğu için yanlıştır. Doğruluk değeri 0 dır.

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{x} = 1$ doğrudur.

c) $\forall x \in \mathbb{Z}, (x^2 = 2x)' \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \neq 2x$ 2 için yanlıştır. Yanlış 0 dır.

d) $\exists x \in \mathbb{Z}, x = 2x$ doğrudur. $x = 0$ için.

5- a) $\exists x \in A,\ x+3=10$ $\quad A=\{2,3,4,5\}$ yanlıştır. 0.

b) $\forall x \in A,\ x+3<10$ doğrudur. 1 $\quad D=A$ dır.

c) $\exists x \in A,\ x+3<5$ $\quad D=\emptyset$

d) $\forall x \in A,\ x+3 \leq 7$ yanlıştır. 0

– Alt Küme –

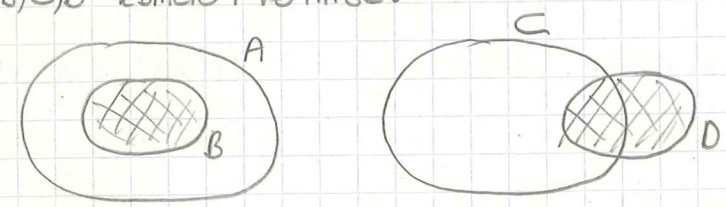
Tanım: A ve B iki küme olsun.

"$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$" önermesi doğru ise "A kümesi B kümesinin alt kümesidir" denir. (Veya B kümesi A kümesini kapsar denir.)

$A \subseteq B$ $\quad (B \supseteq A)$ yazılır.

$$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B]}$$

A, B, C, D kümeleri verilirse.



$B \subseteq A$ $\qquad\qquad$ $D \nsubseteq C$

Has Altküme:

Tanım: A, B nin alt kümesi ve $A \neq B$ ise, A, B nin has alt kümesidir (öz) denir.

$A \subset B$ yazılır.

Teorem: A, B, C herhangi kümeler olmak üzere

a- $A \subseteq A$ (yansıma özelliği)

b- $[A \subseteq B \wedge B \subseteq A] \Leftrightarrow A=B$ (ters simetri özelliği)

c- $[A \subseteq B \wedge B \subseteq C] \Rightarrow (A \subseteq C)$ (geçişme özelliği)

İspat // a) $\forall x \in A \Rightarrow x \in B \Leftrightarrow A \subseteq B$

$\forall x \in A \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \subseteq A$

b) $[A \subseteq B \wedge B \subseteq A] \Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge [\forall x \in B \Rightarrow x \in A]$

$\Leftrightarrow [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow A=B$

ⓒ $[A \subseteq B \wedge B \subseteq C] \Rightarrow (A \subseteq C)$

Alt küme tanımından

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge [\forall x \in B \Rightarrow x \in C]$

$\Rightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in C)$ (Tümdengelim ilkesine göre)

$\Rightarrow (A \subseteq C)$ (Altküme tanımından.)

Teorem: Boş küme her kümenin alt kümesidir.

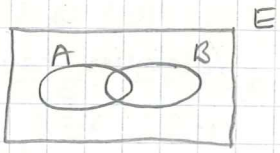
İspat // $x \in \emptyset$ yanlıştır. (Boş kümenin elemanı yoktur.)

$\forall x \in \emptyset$ yanlış bir önermedir. (A herhangi bir küme olmak üzere)

$\forall x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ doğrudur. $\Rightarrow \emptyset \subseteq A$ doğrudur.

Evrensel Küme:

Tanım: Bir araştırma ve inceleme v.s.'de sözü geçen tüm kümeleri kapsayan bir kümeye evrensel küme denir. E sembolü ile gösterilir.



Problemler:

1- $A = \{2, \{4,5\}, 4\}$ ise aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

a- $\{4,5\} \subset A$ c- $\{\{4,5\}\} \subset A$ e- $5 \in A$

b- $\{4,5\} \in A$ d- $\{5\} \in A$ f- $\{5\} \subset A$

2- A, B, C herhangi kümeler olmak üzere, $[A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ve $C \subseteq A]$ ise $A = B$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz?

① ⓐ yanlış ⓑ doğru ⓒ doğru ⓓ yanlış ⓔ yanlış ⓕ yanlış.

② $[A \subseteq B \wedge B \subseteq C \wedge C \subseteq A] \Rightarrow A = B$

(Alt küme tanımından)

$[A \subseteq B \wedge B \subseteq C \wedge C \subseteq A] \Rightarrow [(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in C) \wedge (\forall x \in C \Rightarrow x \in A)]$

$\Rightarrow [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)]$ (tümdengelim ilkesi)

$\Rightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ (Alt küme tanımından)

Kümelerin bileşimi:

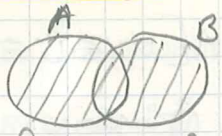
Tanım: A ve B iki küme olsun.

A ve B kümesinin tüm elemanlarıyla oluşan yeni kümedir.

$A \cup B$: "A bileşim B"

$\boxed{A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}}$

Venn Şeması



$A \cup B$

Örnek $A = \{a, b, c\}$ $B = \{c, d, e, f\}$ ise $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ olur.

Teorem : A, B, C herhangi kümeler olmak üzere aşağıdaki özellikler doğrudur.

1. $A \cup A = A$ (Birleşimin tek kuvvet öz.)
2. $A \cup B = B \cup A$ (" değişme öz.)
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Birleşimin birleşme öz.)
4. $A \cup \emptyset = A$ (Birleşimde etkisiz eleman öz.)
5. $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$
6. $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \wedge B = \emptyset)$
7. $A \subseteq B \Leftrightarrow B = A \cup B$

İspat // 1 $A \cup A = A$ (birleşim tanımı)

I 1.yol, önermelerden faydalanarak, $\forall x \in A \cup A \Rightarrow (x \in A \vee x \in A)$ dır.

$\Rightarrow (x \in A)$ ($\vee$ nın tek kuvvet öz)

$\Rightarrow A \cup A \subseteq A$ a

2.yol, $\forall x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in A)$ ($\vee$ nın tek kuv. öz) $\Rightarrow (x \in A \cup A)$ (birl. tanımı) $\Rightarrow A \subseteq A \cup A$ b (Alt küme tanımı)

a. ve b. den dolayı $A \cup A = A$ dır.

II 2.yol $A \cup A = \{x : x \in A \vee x \in A\}$

$= \{x : x \in A\}$ ($\vee$ nın tek kuvvet öz.)

$= A$

2 $A \cup B = B \cup A$

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ (bileşim tanımı)

$= \{x : x \in B \vee x \in A\}$ ($\vee$ nın değişme öz.)

$= B \cup A$

3 $(A \cup B) \cup C \overset{?}{=} A \cup (B \cup C)$

$= \{x : x \in A \cup B \vee x \in C\}$ (bileşim tanımı)

$= \{x : (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\}$ (" ")

$= \{x : x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\}$ ($\vee$ nın birleşme öz) $=$

$= \{x : x \in A \vee (B \cup C)\}$

$= \{x : x \in A \cup (B \cup C)\}$

$= A \cup (B \cup C)$

④ $A \cup \emptyset = A$

$\forall x \in A \cup \emptyset \Rightarrow (x \in A \vee x \in \emptyset)$ (bileşim tanımı.)

$\Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow A \cup \emptyset \subseteq A$ .... a

$\forall x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in \emptyset)$

$\Rightarrow x \in A \cup \emptyset$ (bileşim tanımı)

$\Rightarrow A \subseteq A \cup \emptyset$ .... b

a ve b den dolayı $A \cup \emptyset = A$ dır.

⑤ $A \overset{?}{\subseteq} A \cup B$

$\forall x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B)$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ (bileşim tanımı)

$\Rightarrow A \subseteq A \cup B$

⑥ $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \wedge B = \emptyset)$

$A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow (A \cup B \subseteq \emptyset \subseteq A \cup B)$

İspat // 1. şart gerektir. $\Rightarrow$ $A \cup B = \emptyset$ olsun.

$[A \subseteq A \cup B \wedge A \cup B \subseteq \emptyset] \Rightarrow A \subseteq \emptyset$ (tümdengelim ilkesine göre)

$\Rightarrow (A \subseteq \emptyset \wedge \emptyset \subseteq A)$ (alt küme öz.)

$\Rightarrow A = \emptyset$

Benzer şekilde, $B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ tır.

2. şart yeterdir. $\Leftarrow$: $(A = \emptyset \wedge B = \emptyset) \Rightarrow A \cup B = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

⑦ $A \subseteq B \Leftrightarrow B = A \cup B$ $\quad [(B = A \cup B) \Leftrightarrow (B \subseteq A \cup B \wedge A \cup B \subseteq B)]$

1. gerek şart $\Rightarrow$: $A \subseteq B \Rightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\forall x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ (bileşim tanımı)

$\Rightarrow x \in B \vee x \in B$

$\Rightarrow x \in B$

$\Rightarrow A \cup B \subseteq B \Rightarrow$

$\Rightarrow (A\cup B \subseteq B \wedge B \subseteq A\cup B) \Rightarrow A\cup B = B$

2. şart yeter $\Leftarrow$: $A\cup B = B \Rightarrow (A\cup B \subseteq B \wedge B \subseteq A\cup B)$ (Eşitlik tanımı)

$\Rightarrow (A \subseteq A\cup B \wedge A\cup B \subseteq B \wedge B \subseteq A\cup B)$

$\Rightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A\cup B)$

$\Rightarrow A \subseteq B$

$A\cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$ dir.

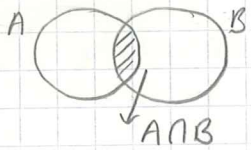
Kümelerin Kesişimi : (Arakesiti)

Tanım : A ve B iki küme olsun.

A ve B nin ortak elemanlarının kümesi, A ve B nin kesişimi olarak adlandırılır.

$A\cap B$: "A kesişim B"

$$\boxed{A\cap B = \{x : x\in A \wedge x\in B\}}$$



Örnek $A=\{a,b,c,d\}$ $B=\{c,d,f,g,h\}$

$A\cap B = \{c,d\}$

Tanım : A ve B kümeleri için $A\cap B = \emptyset$ ise A ve B kümeleri ayrıktır denir.

Örnek Tek sayı $\cap$ Çift sayı $= \emptyset$

Teorem : A, B, C herhangi kümeler olmak üzere

1. $A\cap A = A$ (kesişimin tek kuvvet öz.)
2. $A\cap B = B\cap A$ (" değişme ")
3. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ (kesişimin birleşme öz.)
4. $(A\cap B) \subseteq A$ ve $A\cap B \subseteq B$
5. $A\cap\emptyset = \emptyset$
6. $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B = A$

İspat // 1. $A = \{x : x\in A\}$

$= \{x : x\in A \wedge x\in A\}$

$= \{x : x\in A\cap A\}$

$= A\cap A$

④ $A\cap B \subseteq A$ ve $A\cap B \subseteq B$

$\forall x \in A\cap B \Rightarrow (x\in A \wedge x\in B)$

$\Rightarrow x\in A$

$A\cap B \subseteq A$

⑤ $A\cap\emptyset \overset{?}{=} \emptyset$

$A\cap\emptyset = \{x : x\in A \wedge x\in\emptyset\}$ (kesişim tanımı)

$= \{x : x\in\emptyset\}$

$= \emptyset$

⑥ $A\subseteq B \overset{?}{\Leftrightarrow} A\cap B = A$ $\quad$ $A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x\in A \Rightarrow x\in B)$ veriliyor.

$\forall x\in A\cap B \Rightarrow (x\in A \wedge x\in B)$ kesişim tanımı

$\Rightarrow x\in A$

$\Rightarrow (A\cap B\subseteq A)$ ---- 1

$\forall x\in A \Rightarrow (x\in A \wedge x\in B)$

$\Rightarrow (x\in A\cap B)$ kesişim tanımı

$\Rightarrow (A\subseteq A\cap B)$ ---- 2

1 ve 2 den $A\cap B = A$

Teorem: A, B, C herhangi üç küme olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır:

1- $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ (kesişimin birleşme üzerine soldan dağılma öz.)

2- $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (Birleşimin kesişim " " " ".)

İspat 1// $A\cap(B\cup C) = \{x : x\in A \wedge x\in(B\cup C)\}$ (Kesişim tanımı)

$= \{x : x\in A \wedge (x\in B \vee x\in C)\}$ (Birleşim tanımı)

$= \{x : (x\in A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\in C)\}$ ($\wedge$ nin $\vee$ üzerine dağılma öz.)

$= \{x : x\in(A\cap B) \vee x\in(A\cap C)$ (Kesişim tanımı)

$= (A\cap B)\cup(A\cap C)$

2// $A\cup(B\cap C) = \{x : x\in A \vee x\in(B\cap C)\}$ (Birleşim tanımı)

$= \{x : x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)\}$ (Kesişim tanımı)

$= \{x : (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\in C)\}$ ($\vee$ nın $\wedge$ üzerine dağılma öz.)

$= \{x : x\in(A\cup B) \wedge x\in(A\cup C)\}$ (Birleşim tanımı)

$= (A\cup B)\cap(A\cup C)$

Problemler :

1) m tamsayısı n tamsayısını tam olarak bölüyorsa, "m/n" yazılır.

"m, n'yi böler" veya "m böler n" diye okunur. Buna göre;

$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $B=\{x : x\in A \wedge 3/x\}$ $C:\{x : x\in A \wedge 2/x\}$ ise,

B, C, $B\cup C$, $B\cap C$ kümelerinin elemanlarını liste ve özellik yönteniyle yazın?

2) $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B\cup C=\{1,2,7,8\}$ ise $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ kümesinin elemanlarını liste yönteniyle yazın?

3) $A\cup B = A\cap B \Leftrightarrow A=B$ ispatlayınız.

4) A,B,C,D herhangi kümeler olmak üzere, aşağıdaki özellikler vardır.

a- $A\subseteq B \Rightarrow A\cup C \subseteq B\cup C$

b- $A\subseteq B \wedge A\subseteq C \Rightarrow A\subseteq (B\cap C)$

c- $(A\subseteq B \wedge C\subseteq D) \Rightarrow (A\cup C)\subseteq (B\cup D)$

Çözümler :

1 - $B=\{3,6,9\}$ $C=\{2,4,6,8,10\}$

$B\cup C=\{2,3,4,6,8,9,10\}=\{x : x\in B \vee x\in C\}$

$=\{x : x\in A\ (3/x \vee 2/x)\}$

$B\cap C=\{6\}=\{x : x\in B \wedge x\in C\}$

$=\{x : x\in A\ (3/x \wedge 2/x)\}$

2- $(A\cap B)\cup(A\cap C) = A\cap(B\cup C)$

$=\{1,2\}$

3- İspat// 1: gerek şart $\Rightarrow A\cup B = A\cap B$

$A\subseteq A\cup B \Rightarrow [(A\subseteq A\cup B)\wedge(A\cup B = A\cap B)]$

$\Rightarrow (A\subseteq A\cap B)$

$\Rightarrow [(A\subseteq A\cap B)\wedge(A\cap B\subseteq B)]$

$\Rightarrow A\subseteq B$ ....(1)

$B\subseteq A\cup B \Rightarrow [(B\subseteq A\cup B)\wedge(A\cup B = A\cap B)]$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow B\subseteq A$ (2)

1 ve 2 den

$A=B$ dir.

2: yeter şart $\Leftarrow$: $A=B \Rightarrow A\cup B = A\cup A = A$
$\Rightarrow A\cap B = A\cap A = A$ $\Big\} \Rightarrow A\cup B = A\cap B$

4 - a) $\underbrace{A\subseteq B}_{p} \Rightarrow \underbrace{A\cup C \subseteq B\cup C}_{q}$

$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x\in A \Rightarrow x\in B)$ veriliyor.

İspat// $\forall x\in(A\cup C) \Rightarrow (x\in A \vee x\in C)$ Birleşim tanımı.

$\Rightarrow (x\in B \vee x\in C)$ hipotezden (alt küme tanımından)

$\Rightarrow (x\in B\cup C)$ bileşim tanımı

$\Rightarrow (A\cup C \subseteq B\subseteq C)$

b) $(A\subseteq B \wedge A\subseteq C) \overset{?}{\Rightarrow} A\subseteq(B\cap C)$

$(A\subseteq B \wedge A\subseteq C) \Rightarrow (A\cup B = B \wedge A\cup C = C)$ Alt küme öz.

$\Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cup C) = B\cap C$ kesişim tanımı

$\Rightarrow [A\cup(B\cap C) = B\cap C]$ birleşimin kesişim üz. dağ. öz.

$\Rightarrow [A\subseteq A\cup(B\cap C) = B\cap C]$

$\Rightarrow A\subseteq B\cap C$

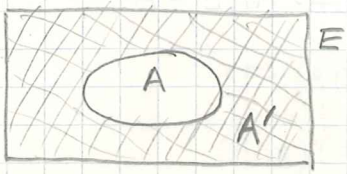
c)

Bir Kümenin Tümleyeni

E bir evrensel bir küme ve A herhangi bir küme olsun.

E'nin A kümesinde bulunmayan elemanlarının kümesine "A nın E kümesine göre tümleyeni" denir. Ve A' ile gösterilir. "A tümleyen" veya "A nın tümleyeni" okunur.

$\boxed{A' = \{x : x\in E \wedge x\notin A\}}$



Örnek// E: Alfabedeki harfler kümesi

A: " sesli harfler "

A': Alfabedeki sessiz harfler kümesi.

Teorem: E evrensel küme, A ve B de herhangi iki küme olsun.

1- $A \cup E = E$

2- $A \cap E = A$

3- $A \cup A' = E$

4- $x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$

5- $A \cap A' = \emptyset$

6- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

7- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

8- $(A')' = A$

9- $E' = \emptyset$

10- $\emptyset' = E$

11- $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

İspat// 1- $A \cup E = E$

I. Metod// $A \cup E = \{x : x \in A \vee x \in E\}$ birleşim tanımı

$= \{x : x \in E\}$

$= E$

II. Metod// $\forall x \in A \cup E \Rightarrow (x \in A \vee x \in E)$ bileşim tanımı

$\Rightarrow x \in E$

$\Rightarrow A \cup E \subseteq E$ _____

$\forall x \in E \Rightarrow (x \in A \vee x \in E)$

$\Rightarrow x \in A \cup E$

$\Rightarrow E \subseteq A \cup E$ _____

$A \cup E = E$ olur.

III. Metod// $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ $B = E$ alınırsa

$A \subseteq E \Rightarrow A \cup E = E$ (bileşim ve alt küme öz.)

2- $A \cap E = A$

1. metod/ $A \cap E = \{x : x \in A \wedge x \in E\}$

$= \{x : x \in A$

$= A$

3. metod/ $A \subseteq E \Rightarrow A \cap E = A$

3- $A \cup A' = E$

$A \cup A' = \{x : x \in A \vee x \in A'\}$ bileşim tanımı

$= \{x : x \in E\}$

$= E$

4- $x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$

$x \in A \Leftrightarrow [(x \in A)']' \Leftrightarrow [x \notin A]' \Leftrightarrow [x \in A']' \Leftrightarrow x \notin A'$

5- $A \cap A' = \emptyset$

$\emptyset = \{x : x \in \emptyset\} = \{x : x \in A \wedge x \in A'\} = \{x : x \in A \cap A'\} = A \cap A'$

$\emptyset = A \cap A'$

6- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

İspat (1.) $\forall x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin A \cup B$ tümleyen tanımı

$\Rightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)$

$\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cap B'$ kesişim tanımı

$\Rightarrow (A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

(2) $\forall x \in A' \cap B' \Rightarrow (x \in A' \wedge x \in B')$ kesişim tanımı

$\Rightarrow (x \notin A \cap x \notin B)$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$

$\Rightarrow A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

$A' \cap B' = (A \cup B)'$

7- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$\forall x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin A \cap B$ tümleyen tanımı

$\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B)$

$\Leftrightarrow x \in A' \vee x \in B'$

$\Leftrightarrow x \in A' \cup B'$ birleşim tanımı

$\Leftrightarrow (A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

8- $(A')' = A$

$= \{x : x \in (A')'\}$

$= \{x : x \notin A'\}$

$= \{x : x \in A\} = A$

11- $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

Hipotez: $A \subseteq B \Rightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

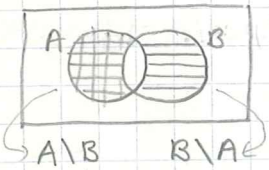
$\Rightarrow (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$

$\Rightarrow (x \in B' \Rightarrow x \in A')$

$\Rightarrow B' \subseteq A'$

İki Kümenin Farkı

A ve B iki küme olsun. A kümesinin B kümesinde bulunmayan elemanlarının kümesine A ve B kümelerinin farkı (B nin A dan farkı) denir. Ve $A \setminus B$ ile gösterilir. "A fark B" diye okunur.



Örnek $A = \{x : -3 \leq x < 1, x \in \mathbb{R}\} = [-3, 1)$

$B = \{x : -1 < x \leq 2, x \in \mathbb{R}\} = (-1, +2]$

$A \setminus B = [-3, -1]$ $\quad B \setminus A = [1, 2]$

$\boxed{A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}}$

Teorem: A ve B iki küme olmak üzere,

$A \setminus B = A \cap B'$

İspat// $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

$= \{x : x \in A \wedge x \in B'\}$

$= \{x : x \in A \cap B'\}$

$= A \cap B'$

Problemler :

A, B, C herhangi kümeler olmak üzere,

1- $A \setminus B' = A \cap B$

2- $(A \setminus B)' = B \cup A'$ özelliklerinin doğrulugunu ispatlayınız ?

3- $A \cap [(A \cup B) \setminus B]$ kümesini kümelerle ilgili özellikler yardımıyla en basit şekilde yazın.

4- $A \subseteq B$ ise $C \setminus B \subseteq C \setminus A$ önermesinin doğrulugunu ispatlayınız ?

5- $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

$A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$ önermelerinin doğrulugunu ispatlayınız ?

Çözümler :

① $A \setminus B' = \{x : x \in A \wedge x \notin B'\}$

$= \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ tümleyen tanımı

$= \{x : x \in A \cap B\}$ kesişim tanımı

$= A \cap B$

② $(A \setminus B)' = \{x : x \in (A \setminus B)'\}$ $\qquad (A \setminus B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$

$= \{x : x \notin A \setminus B\}$

$= \{x : x \notin (A \cap B')\}$ teoremden

$= \{x : x \notin A \vee x \notin B'\}$

$= \{x : x \in A' \vee x \in B\}$

$= \{x : x \in A' \cup B\}$

$= A' \cup B$

③ $A \cap [(A \cup B) \setminus B] = A \cap [(A \cup B) \cap B']$ Teoremden

$= A \cap [(A \cap B') \cup (B \cap B')$ kesişimin birl. üz. dağ. öz.

$= A \cap [(A \cap B') \cup \emptyset]$

$= A \cap [A \cap B']$ bileşimin etkisiz eleman öz.

$= (A \cap A) \cap B'$ kesişimin birl. öz.

$= A \cap B'$ " tek kuv. öz.

$= A \setminus B$ teoremden (farkın tanımı)

④ $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$

$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$ teoremden

$\Rightarrow C \cap B' \subseteq C \cap A'$

$\Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$ teoremden (farkın tanımı)

⑤ • $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

$A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \cap B)'$ teoremden

$= A \cap (A' \cup B')$

$= (A \cap A') \cup (A \cap B')$

$= (\emptyset \cup (A \cap B)')$

$= A \cap B'$

$= A \setminus B$

• $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$

$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)'$

$= A \cap (B' \cap C')$ De morgan'dan

$= (A \cap A) \cap (B' \cap C')$ tek kuvvet öz.

$= (A \cap B') \cap (A \cap C')$

$= (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

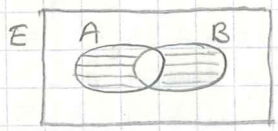
Ödev// $(A \setminus B) \cap C \overset{?}{=} (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

İki Kümenin Simetrik Farkı :

A ve B iki küme olsun. $A \cup B$ kümesinin, $A \cap B$ kümesinde olmayan elemanlarının kümesine, A ve B nin simetrik farkı denir.

$A \Delta B$ "A simetrik fark B"

Venn Şeması,



$A \Delta B$

Örnek// $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{d, e, f\}$

$A \Delta B = \{a, b, c, e, f\}$

Örnek // $A=[-3,1]$ $B=(-2,2)$ $A\cap B=(-2,1]$ $A\cup B=[-3,2)$

$$A\Delta B=[-3,-2]\cup(1,2)$$

$$\boxed{A\Delta B=\{x : x\in(A\cup B)\wedge x\notin A\cap B\}}$$

Teorem: A,B kümeleri için $A\Delta B \overset{?}{=} B\Delta A$ dır. (ödev)

İspat //
$$A\Delta B=\{x : x\in A\cup B\wedge x\notin A\cap B\}$$
$$=\{x : x\in B\cup A\wedge x\notin B\cap A\}=B\Delta A$$

Teorem: $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ dır.

$$A\Delta B=\{x : x\in A\cup B\wedge x\notin A\cap B\}$$
$$=\{x : x\in A\cup B\wedge x\in(A\cap B)'\}$$
$$=\{x : (x\in A\vee x\in B)\wedge x\in(A\cap B)'\}$$
$$=\{x : [x\in A\wedge x\in(A\cap B)']\vee[x\in B\wedge x\in(A\cap B)']\}$$
$$=\{x : [x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B)]\vee[x\in B\wedge(x\notin A\vee x\notin B)]\}$$
$$=\{x : [\underbrace{(x\in A\wedge x\notin A)}_{t}\vee(x\in A\wedge x\notin B)]\vee[(x\in B\wedge x\notin A)\vee\underbrace{(x\in B\wedge x\notin B)}_{\text{yanlış}}]\}$$
$$=\{x : t\vee(x\in A\setminus B)\vee(x\in B\setminus A)\vee t\}$$
$$=\{x : (x\in A\setminus B)\vee(x\in B\setminus A)\}$$
$$=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

Problemler:

1- $A=\{1,2,3,5,7,8,9\}$ $B=\{1,4,6,8,9\}$ ise $A\Delta B=?$

2- E evrensel küme olmak üzere

a) $A\Delta\emptyset=A$

b) $A\Delta E=A'$

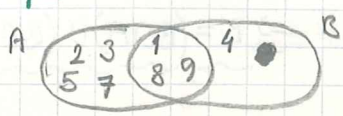
c) $A\Delta A=\emptyset$ olduğunu ispatlayın?

3- $A\Delta(B\cap A)\overset{?}{=}A\setminus B$

4- $A\Delta(B\Delta C)\overset{?}{=}(A\Delta B)\Delta C$

5- $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Çözüm/ 1-



$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$
$$=\{2,3,4,5,7\}$$

2- a) $A \Delta \emptyset = A$

$$A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A)$$
$$= (A \cap \emptyset') \cup (\emptyset \cap A')$$
$$= (A \cap E) \cup \emptyset$$
$$= A \cup \emptyset = A$$

b) $A \Delta E = A'$

$$A \Delta E = (A \setminus E) \cup (E \setminus A)$$
$$= (A \cap E') \cup (E \cap A')$$
$$= (A \cap \emptyset) \cup A'$$
$$= \emptyset \cup A' = A'$$

c) $A \Delta (B \cap A) = A \setminus B$

$$A \Delta (B \cap A) = [A \setminus (B \cap A)] \cup [(B \cap A) \setminus A]$$
$$= [A \cap (B \cap A)'] \cup [(B \cap A) \cap A']$$
$$= [A \cap (B' \cup A')] \cup [B \cap (A \cap A')]$$
$$= [(A \cap B') \cup (A \cap A')] \cup [B \cup \emptyset]$$
$$= [(A \cap B') \cup \emptyset] \cup \emptyset =$$
$$= A \cap B'$$
$$= A \setminus B$$

Sonlu ve Sonsuz Kümeler :

Eleman sayıları sonlu (belli) olan kümelere sonlu kümeler, sonsuz sayıda olan kümelere de sonsuz kümeler denir.

$\{x : x \in \mathbb{Z} \text{ ve } x < -1\}$ sonsuz küme

$[-1, 2] = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ ve } -1 \leq x \leq 2\}$ sonsuzdur. (Reel sayı olduğu için)

Sonlu bir A kümesinin eleman sayısını,

$n(A)$, $s(A)$, $|A|$ ifade ederiz.

Teorem: A ve B kümeler ise,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

İspat // 1° $A \cap B = \emptyset$ ise

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

2° $A \cap B \neq \emptyset$ ise

$A = A \cap E = A \cap (B \cup B')$ $\Rightarrow$ $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

$B = B \cap E = B \cap (A \cup A')$ $\Rightarrow$ $B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$

$$(A\cap B)\cap(A\cap B') = A\cap(B\cap B')\cap A$$
$$= A\cap\emptyset\cap A = \emptyset$$
$$\Rightarrow n(A) = n[(A\cap B)\cup(A\cap B')]$$
$$\Rightarrow n(A) = n(A\cap B) + n(A\cap B')$$

$$(B\cap A)\cap(B\cap A') = B\cap(A\cap A')\cap B$$
$$= B\cap\emptyset\cap B = \emptyset$$
$$\Rightarrow n(B) = n[(B\cap A)\cup(B\cap A')]$$
$$\Rightarrow n(B) = n(B\cap A) + n(B\cap A')$$

$$\Rightarrow n(A) + n(B) = 2\,n(A\cap B) + n(A\cap B') + n(B\cap A')$$
$$\Rightarrow n(A) + n(B) - n(A\cap B) = n(A\cap B) + n(A\cap B') + n(B\cap A')$$

$$(A\cap B)\cap(A\cap B') = A\cap(\underbrace{B\cap B'}_{\emptyset})\cap A = \emptyset$$
$$(A\cap B')\cap(B\cap A') = (A\cap A')\cap(B\cap B') = \emptyset$$
$$(A\cap B)\cap(B\cap A') = \emptyset$$

$$(\underbrace{A\cap B}_{C})\cup(A\cap B')\cup(B\cap A') =$$
$$= [C\cup(A\cap B')]\cup(B\cap A') = [(C\cup A)\cap(C\cup B')]\cup(B\cap A')$$
$$= ([(A\cap B)\cup A]\cap[(A\cap B)\cup B'])\cup(B\cap A')$$
$$= A\cap[(A\cup B')\cap(B\cup B')]\cup(B\cap A')$$
$$= A\cap[(A\cup B')\cap E]\cup(B\cap A')$$
$$= [A\cap(A\cup B)]\cup(B\cap A')$$
$$= A\cup(B\cap A')$$
$$= (A\cup B)\cap(A\cap A')$$
$$= (A\cup B)\cap E$$
$$= A\cup B$$

$$\boxed{n(A) + n(B) - n(A\cap B) = n(A\cup B)}$$

Problemler:

1- E evrensel küme 10 elemanlıdır.

$n(A)=5$ $n(B)=3$ $n(A\cap B)=1$ ise $n(A\cup B)$, $n(A')$, $n(A\cap B')$, $n(A'\cap B')$ nedir?

2- A ve B iki küme olmak üzere

$n(A\cup B)=n(A)$ ise A ve B kümeleri arasındaki bağıntıyı bulun.

3- A,B,C herhangi kümeler olmak üzere $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-[n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)]-n(A\cap B\cap C)$ old. isp.

4- Bir okulda açılan yabancı dil kursuna 30 öğrenci katılmıştır.

Bu öğrencilerden 16 sı İngilizce, 11'i fransızca, 15 i Almanca kursunu başarmıştır.

İngilizce ve Almancı kursunu başaranların sayısı 5

" Fransızca 4

Almanca " 6 ise ve

her öğrencinin en az bir kurstan başarılı olduğu bilindiğine göre bu üç kursun herbirinden başarılı olan ve olamıyan öğrenci sayısını bulun?

Çözümler:

1- $n(E)=10$ $n(A)=5$ $n(B)=3$ $n(A\cap B)=1$

- $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$n(A\cup B) = 5+3-1 = 7$ //

$n(A')=?$ $E=A\cup A'$ $A\cap A'=\emptyset$

$n(E)=n(A)+n(A')$

$10 = 5+n(A')$

- $n(A')=5$ //
- $n(B')=10-3=7$ //

- $n(A\cap B')=$

$A=A\cap E=A\cap(B\cup B')$

$A=(A\cap B)\cup(A\cap B')$

$=\underbrace{(A\cap B)\cap(A\cap B')}_{\text{ayrık kümelerdir.}}=\emptyset$

$n(A)=n[(A\cap B)\cap(A\cap B')]$

$n(A)=n(A\cap B)+n(A\cap B')$

$5 = 1 + n(A\cap B')$

$n(A\cap B')=4$

• $n(A'\cap B') =$

$B' = B'\cap E$ (AH küme tanımından)

$= B'\cap(A'\cup A)$

$= (B'\cap A')\cup(B'\cap A)$

$(B'\cap A')\cap(B'\cap A) = \emptyset$

$n(B') = n(B'\cap A') + n(B'\cap A)$

$7 = n(B'\cap A') + 4$

$n(A'\cap B') = 3$ //

Veya; $A'\cap B' = (A\cup B)'$ (De Morgan)

$n(A'\cap B') = n(A\cup B)' = 10 - 7 = 3$ //

2- $n(A\cup B) = n(A)$ $A\cup B = A$ .....

$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

$n(A) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

$0 = n(B) - n(A\cap B)$

$n(B) = n(A\cap B)$ $A\cap B = B$ .....

$A\cup B = A \Rightarrow A\subseteq A\cup B$, $A\cup B\subseteq A$

$A\cap B = B \Rightarrow B\subseteq A\cap B$, $A\cap B\subseteq A$

$B\subseteq A$

3- $n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - [n(A\cap B) + n(A\cap C) + n(B\cap C)] - n(A\cap B\cap C)$

$= n[(A\cup B)\cup C]$

$= n(A\cup B) + n(C) - [n(A\cup B)\cap C]$

$= n(A) + n(B) - n(A\cap B) + n(C) - n[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - \{[n(A\cap C) + n(B\cap C)] - n[(A\cap C)\cap(B\cap C)]\}$

$\boxed{n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)}$

4- $n(I) = 16$ $n(F) = 11$ $n(A) = 15$

$n(I\cap A) = 5$ $n(I\cap F) = 4$ $n(A\cap F) = 6$

$30 - 16 = 14$ I başarısız.

$30 - 11 = 19$ F başarısız.

$30 - 15 = 15$ A başarısız.

$n(I\cup F\cup A) = 30$

$n(I\cap F\cap A) =$

$n(I\cup F\cup A) = n(I) + n(F) + n(A) - \{n(I\cap F) + n(I\cap A) + n(F\cap A)\} + n(A\cap F\cap I)$

$16 - 3 - 2 - 1 = 10$ kişi I den başarılı

$30 = 16 + 11 + 15 - (4 + 5 + 6) + n(A\cap F\cap I)$

$n(A\cap F\cap I) = 3$ kişi başarılı

- Kümeler Ailesi -

Örnek // $A=\{a,b,c\}$ kümesinin alt kümeleri,

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

$A_1=\emptyset$, $A_2=\{a\}$, $A_3=\{b\}$, $A_4=\{c\}$, $A_5=\{a,b\}$, $A_6=\{a,c\}$, $A_7=\{b,c\}$, $A_8=A$

$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ gibi bir I kümesi seçersek, bu kümenin herbir i elemanına, bir A_i kümesi karşılık getirilmiş olur. Tersine olarak da, herbir A_i kümesine I'nın bir i elemanı karşılık getirilmiş olur.

Tanım: Herhangi bir I kümesi veriliyor. I'nın herbir i elemanı için, bir A_i kümesi varsa, I kümesine "indisleyen küme" (indisler kümesi), I'nın herbir i elemanına bir "indis", A_i kümelerinden herbirine de "indislemiş küme" denir.

Tanım: (Kümeler Ailesi): I indisler kümesi olmak üzere ve herbir $i \in I$ için bir A_i kümesi varsa, $\mathcal{A}=\{A_i : i \in I\}$ kümesine kümeler ailesi denir.

(Elemanları da küme olan kümeye kümeler ailesi denir.)

Kümeler Ailesi (tekil) — Küme aileleri (çoğul)

Örnek // $A_1=[-1,1)=\{x : x\in\mathbb{R} \text{ ve } -1\leq x<1\}$

$A_2=[-2,1/2)$

$A_3=[-3,1/3)$

$A_4=[-4,1/4)$

$\mathcal{A}=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}=\{A_i : i\in I\}$

$I=\{1,2,3,4\}$

Örnek // $A_1=\{a,b,c,ç,d\}$ $A_2=\{b,c,e,f,g\}$ $A_3=\{a,b,ç,f,g,h,ı,i,j\}$

$\mathcal{A}=\{A_1,A_2,A_3\}$, $I=\{1,2,3\}$

- Boş Aile -

$\mathcal{A}=\{A_i : i\in\emptyset\}$ ailesine boş aile denir.

Tanım: (Alt Aile): $\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ ve $\mathcal{B}=\{A_j : j\in J\}$ aileleri veriliyor. Eğer $J\subseteq I$ ise "$\mathcal{B}$ ailesi $\mathcal{A}$ ailesinin alt ailesidir" denir. Sembolik olarak

$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ ile gösterilir.

Örnek // $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,A_5\}$ $\mathcal{B}=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$ ise

$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ dir.

Kümeler Ailesinin Birleşimi:

$\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ kümeler ailesi verildiğinde,

$\{x : \exists k\in I,\ x\in A_k\}$ kümesine $\mathcal{A}$ ailesinin birleşimi denir.

$[\exists k\in I,\ x\in A_k] \equiv (x\in A_1 \vee x\in A_2 \vee x\in A_3 \vee \ldots\ldots \vee x\in A_n)$

$\equiv [x\in (A_1\cup A_2\cup A_3\cup \ldots\ldots \cup A_n)]$

Sembolik olarak,

$$\bigcup_{i\in I} A_i \ ,\quad \bigcup \mathcal{A} \ ,\quad \bigcup_{A_i\in\mathcal{A}} A_i$$

Örnek// $A_1=[-1,1)$ $A_2=[-2,1/2)$ $A_3=[-3,1/3)$ $A_4=[-4,1/4)$ $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$

$\bigcup\mathcal{A}=\{x : \exists k\in I,\ x\in A_k\}=\{x : x\in A_1 \vee x\in A_2 \vee x\in A_3 \vee x\in A_4\}$

$=[-1,1)\cup[-2,1/2)\cup[-3,1/3)\cup[-4,1/4)$

$=[-4,1)$

Örnek// $A_1=\{a,b,c,ç,d\}$ $A_2=\{b,c,e,f,g\}$ $A_3=\{a,b,ç,f,g,h,ı,i,j\}$

$\mathcal{A}=\{A_1,A_2,A_3\}$ ise

$\bigcup_{i\in I} A_i=\{a,b,c,ç,d,e,f,g,h,ı,i,j\}$

Teorem: Boş ailenin birleşimi boş kümeye eşittir.

İspat// $\mathcal{A}=\{A_i : i\in\emptyset\}$ ise

$\bigcup\mathcal{A}=\{x : \exists k\in\emptyset,\ x\in A_k\}$

$\exists k\in\emptyset,\ x\in A_k$ önermesi yanlıştır. Çünkü en az bir k elemanı, boş kümenin bir elemanı ise hiçbir x elemanı olmayan bir küme de yoktur. Sonuç boş kümedir.

- Kümeler Ailesinin Kesişimi -

$\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ kümeler ailesi verildiğinde,

$\{x : \forall k\in I,\ x\in A_k\}$ kümesine $\mathcal{A}$ ailesinin kesişimi denir.

$[\forall k\in I,\ x\in A_k] \equiv (x\in A_1 \wedge x\in A_2 \wedge x\in A_3 \wedge \ldots\ldots \wedge x\in A_n)$

$\equiv [x\in (A_1\cap A_2\cap A_3\cap \ldots\ldots \cap A_n)]$

Sembolik olarak

$$\bigcap_{i\in I} A_i \ ,\quad \bigcap\mathcal{A} \ ,\quad \bigcap_{A_i\in\mathcal{A}} A_i$$

Örnek// $A_1=[-1,1)$ $A_2=[-2,1/2)$ $A_3=[-3,1/3)$ $A_4=[-4,1/4)$

$\mathcal{A}=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$

$\bigcap\mathcal{A}=\{x : \forall k\in I,\ x\in A_k\}=A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=[-1,1/4)$

Tanım: $\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ olduğuna göre $\forall k,t\in I$ için $k\neq t \Rightarrow A_k\cap A_t=\emptyset$ önermesi doğru ise $\mathcal{A}$ ailesine ayrık aile denir.

Örnek $I=\{1,2,3\}$ $A_1=\{a,b\}$ $A_2=\{c,d,e\}$ $A_3=\{f,g,h\}$ ise

$\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ ayrık mıdır?

Kesişimleri $\emptyset$ olduğu için $\mathcal{A}$ ayrık ailedir.

Teorem: Boş ailenin kesişimi evrensel kümeye eşittir.

İspat// $\mathcal{A}=\{A_i : i\in\emptyset\}$ $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i=\{x : \forall k\in\emptyset, x\in A_k\}$

$$E=\bigcap_{i\in\emptyset} A_i \Rightarrow \begin{cases}\bigcap_{i\in\emptyset} A_i\subseteq E\\ E\subseteq \bigcap_{i\in\emptyset} A_i\end{cases}$$

Evrensel kümenin bir y elemanını alalım. $y\in E$ seçelim.

$$(\forall y\in \bigcap_{i\in\emptyset} A_i) \Leftrightarrow (\forall k\in\emptyset, y\in A_k)$$

$$E\subseteq \bigcap_{i=\emptyset} A_i \Rightarrow (E\subseteq \bigcap_{i=\emptyset} A_i \wedge \bigcap_{i\in\emptyset} A_i \subseteq E) \Rightarrow E=\bigcap_{i=\emptyset} A_i$$

Teorem: (Genelleştirilmiş De Morgan Kuralları):

$\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ olduğuna göre

a- $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)'=\bigcap_{i\in I} A_i'$

b- $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)'=\bigcup_{i\in I} A_i'$

İspat// a) $\forall x\in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' \Leftrightarrow x\notin \bigcup_{i\in I} A_i$

$$\Leftrightarrow (\forall k\in I, x\notin A_k)$$

$$\Leftrightarrow (\forall k\in I, x\in A_k')$$

$$\Leftrightarrow x\in \bigcap_{i\in I} A_i'$$

$$\left.\begin{aligned}&\Leftrightarrow \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)'\subseteq \bigcap_{i\in I} A_i'\\ &\Leftrightarrow \bigcap_{i\in I} A_i'\subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)'\end{aligned}\right\} \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)'=\bigcap_{i\in I} A_i'$$

b) $\forall x \in (\bigcap_{i\in I} A_i)' \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} A_i$ Tümleyen tanımı

$\Leftrightarrow (\exists k \in I, x \notin A_k)$

$\Leftrightarrow (\exists k \in I, x \in A_k')$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow (\bigcap_{i\in I} A_i)' \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i' \\ \Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i' \subseteq (\bigcap_{i\in I} A_i)' \end{array}\right\} (\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$$

Teorem: (Genelleştirilmiş dağılma kuralları):

$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ olmak üzere

1- $(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{i\in I} [\bigcup_{j\in J} (A_i \cap B_j)] = \bigcup_{j\in J} [\bigcup_{i\in I} (A_i \cap B_j)]$

2- $(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{i\in I} [\bigcap_{j\in J} (A_i \cup B_j)] = \bigcap_{j\in J} [\bigcap_{i\in I} (A_i \cup B_j)]$

İspat// 1) $\forall x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) \Leftrightarrow (x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \in \bigcup_{j\in J} B_j)$ kesişim tanımı

$\Leftrightarrow [(\exists k \in I, x \in A_k) \wedge (\exists t \in J, x \in B_t)]$ kümeler ailesinin birleşimi tanımından.

$\Leftrightarrow [\exists k \in I, \exists t \in J (x \in A_k \wedge x \in B_t)]$

$\Leftrightarrow [\exists k \in I, (\exists t \in J, x \in A_k \cap B_t)]$

$\Leftrightarrow (\exists k \in I, x \in \bigcup_{j\in J} A_k \cap B_j)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} [\bigcup_{j\in J} (A_i \cap B_j)]$

2) $\forall x \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{j\in J} B_j) \Leftrightarrow (x \in \bigcap_{i\in I} A_i \vee x \in \bigcap_{j\in J} B_j)$

$\Leftrightarrow [(\exists k \in I, x \in A_k) \vee (\exists t \in J, x \in B_t)]$

$\Leftrightarrow [\exists k \in I, \exists t \in J (x \in A_k \vee x \in B_t)]$

$\Leftrightarrow [\exists k \in I, (\exists t \in J, x \in A_k \cup B_t)]$

$\Leftrightarrow (\exists k \in I, x \in \bigcap_{j\in J} A_k \cup B_j)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} [\bigcap_{j\in J} (A_i \cup B_j)]$

$\Leftrightarrow \bigcap_{i\in I} [\bigcap_{j\in J} (A_i \cup B_j)]$

Örnek $I=\{1,2,3\}$, $J=\{1,2\}$ $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$ kümesini $A_i\cap B_j$ kümelerinin birleşimi olarak yazın.

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left[\bigcup_{j\in J}(A_i\cap B_j)\right]$$
$$= \bigcup_{i\in I}\left[(A_i\cap B_1)\cup(A_i\cap B_2)\right]$$
$$= \left[(A_1\cap B_1)\cup(A_1\cap B_2)\right]\cup\left[(A_2\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2)\right]\cup\left[(A_3\cap B_1)\cup(A_3\cap B_2)\right]$$
$$= (A_1\cap B_1)\cup(A_1\cap B_2)\cup(A_2\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2)\cup(A_3\cap B_1)\cup(A_3\cap B_2)$$

Veya, $$= \bigcup_{j\in J}\left[\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B_j)\right]$$
$$= \bigcup_{j\in J}\left[(A_1\cap B_j)\cup(A_2\cap B_j)\cup(A_3\cap B_j)\right]$$
$$= \left[(A_1\cap B_1)\cup(A_2\cap B_1)\cup(A_3\cap B_1)\right]\cup\left[(A_1\cap B_2)\cup(A_2\cap B_2)\cup(A_3\cap B_2)\right]$$
$$= (A_1\cap B_1)\cup(A_2\cap B_1)\cup(A_3\cap B_1)\cup(A_1\cap B_2)\cup(A_2\cap B_2)\cup(A_3\cap B_2)$$

Tanım: (Bir kümenin kuvvet kümesi):

Herhangi bir kümenin tüm alt kümelerinden meydana gelen aileye bu kümenin kuvvet kümesi denir. Bir A kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$ ile gösterilir.

$$P(A)=\{A_i : A_i\subseteq A\}$$

Örnek: $A=\{a,b,c\}$ ise

$$P(A)=\{\emptyset, A, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

Tanım: Bir kümenin ayırımı (=Parçalanışı):

Boş olmayan bir A kümesi ve bu A kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ ailesi verilsin. Eğer,

1° $\emptyset\notin\mathcal{A}$

2° $(\forall k,t\in I$ ve $k\neq t) \Rightarrow A_k\cap A_t=\emptyset$

3° $A=\bigcup_{i\in I} A_i$

özellikleri sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ ailesi A kümesinin bir ayırımı (parçalanışı) (ayrışımı) dır denir.

Örnek: $Ç=\{0,2,4,6,\ldots,2n,\ldots\}$ $T=\{1,3,5,7,\ldots,2n+1,\ldots\}$

$\mathcal{A}=\{Ç,T\}$ ailesi $\mathbb{N}$'nin bir ayırımıdır.

- $\emptyset\notin\mathcal{A}$
- $Ç\cap T=\emptyset$
- $Ç\cup T=\mathbb{N}$

Örnek: $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $A_1=\{1,3\}$ $A_2=\{7,8,9,10\}$

$A_3=\{2,5,6\}$ $A_4=\{4,9\}$

$\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ $I=\{1,2,3,4\}$

- $\emptyset\notin A$
- $A_1\cap A_2=\emptyset$ $A_1\cap A_3=\emptyset$ $A_1\cap A_4=\emptyset$

  $A_2\cap A_3=\emptyset$ $A_2\cap A_4=\emptyset$ $A_3\cap A_4=\emptyset$
- $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=A$

Tanım: Bir Kümenin Örtüsü:

$\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ ailesinin birleşimi bir A kümesini kapsıyorsa "$\mathcal{A}$ ailesi A kümesinin bir örtüsüdür" denir.

$$A\subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

Örnek: $A=\{0,1,2\}$ $\mathcal{A}=\{\{1,2,3\},\{0,2,5\},\{3,4\}\}$ A kümesi, $\mathcal{A}$ nın bir örtüsü midir?

$\cup\mathcal{A}=\{0,1,2,3,4,5\}\supset\{0,1,2\}=A$ örtüsüdür.

Problemler:

1- $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leq x\leq b$ eşitsizliğini sağlayan reel sayıların kümesi, $[a,b]$ ile gösterilir. $Z=\{\ldots -2,-1,0,1,2\ldots\}$ ve $\mathcal{A}=\{A_k : k\in Z \text{ ve } A_k=[k,k+1]\}$ olduğuna göre aşağıdaki kümeleri en basit şekilde gösterin.

a) $A_1\cup A_2$ b) $A_{-2}\cup A_{-1}\cup A_0$ c) $A_3\cap A_4$ d) $\bigcup_{i\in Z} A_i$

2- $a,b\in\mathbb{R}$, $a<x<b$ eşitsizliğini sağlayan reel sayıların kümesi, (a,b) ile gösterilir. $S=\{1,2,3,4,\ldots,n,\ldots\}$ ve $\mathcal{A}=\{A_n : n\in S \text{ ve } A_n=(0,1/n)\}$ olduğuna göre aşağıdaki kümeleri en basit şekilde gösterin.

a) $A_3\cap A_{20}$ b) $k,t\in S, A_k\cup A_t$ c) $A_3\cup A_7$ d) $k,t\in S, A_k\cap A_t$

3- Sayma sayıları kümesinin bir ayrımı,

$\{\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15\}\ldots\}$ ise bu ayrımda 40. eleman olan kümenin elemanları toplamını bulun?

4- $\mathcal{A}=\{A_n : n\in S\}$ verilsin. $B_1=A_1$, $B_2=A_2\setminus A_1$, $B_3=A_3\setminus\{A_1\cup A_2\}$ .....

..... $B_n=A_n\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$ $n=2,3,\ldots$ olmak üzere

$\mathcal{B}=\{B_n : n\in S\}$ kümeler ailesi tanımlanıyor. $\mathcal{B}$ ailesinin kümelerinin ikişer ikişer ayrık olduklarını ispat edin.

5- Düzlemde merkezi başlangıç noktasında olan 3 yarıçaplı çembere içten teğet olan 1 yarıçaplı dairelerin kümesini $\mathcal{A}$ ve 2 yarıçaplı dairelerin kümesini de $\mathcal{B}$ ile gösterelim. $\bigcup\mathcal{A}$ ve $\bigcup\mathcal{B}$ kümelerini bulun.

6- $A=\{1,2,3\}$ kümesinin tüm ayrımlarını bulun.

7- $\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ ailesi veriliyor. $J\subset I$ ise

a) $\bigcup_{i\in J} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ b) $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{j\in J} A_i$ olduklarını ispat edin.

8- $\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ verilsin ve B bir küme olsun.

a) $\forall i\in I$ için $A_i\subseteq B$ ise $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$ dir.

b) $\forall i\in I$ için $B\subseteq A_i$ ise $B\subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ olduğunu ispat edin.

Çözümler:

1-a) $a\leq x\leq b$ $[a,b]=\{x : x\in\mathbb{R}$ ve $a\leq x\leq b\}$

$\mathcal{A}=\{A_k : k\in\mathbb{Z}$ ve $A_k=[k,k+1]\}$

$A_1\cup A_2=?$ $A_1=[1,2]$ $A_2=[2,3]$

$A_1\cup A_2=[1,2]\cup[2,3]=[1,3]$

b) $A_{-2}\cup A_{-1}\cup A_0=?$

$A_{-2}=[-2,-1]$ $A_{-1}=[-1,0]$ $A_0=[0,1]$

$A_{-2}\cup A_{-1}\cup A_0=[-2,-1]\cup[-1,0]\cup[0,1]$

$=[-2,1]$

c) $A_3\cap A_4=?$

$A_3=[3,4]$ $A_4=[4,5]$

$A_3\cap A_4=[3,4]\cap[4,5]=\{4\}$

d) $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} A_i=?$ $\ldots A_{-2}\cup A_{-1}\cup A_0\cup A_1\cup A_2\cup\ldots$

$=\ldots\cup[-1,0]\cup[0,1]\cup[1,2]\ldots$

$=\mathbb{R}$ //

2- $a<x<b$, $(a,b)=\{x : x\in\mathbb{R}$ ve $a<x<b\}$ $S=\{1,2,3,\ldots\}$

$\mathcal{A}=\{A_n : n\in S$ ve $A_n=(0,1/n)\}$

a) $A_3\cup A_7$ $A_3=(0,1/3)$ $A_7=(0,1/7)$

$A_3\cup A_7=(0,1/3)=A_3$

b) $A_3 \cap A_{20} = ?$

$A_3 = (0, 1/3)$ $A_{20} = (0, 1/20)$ $A_3 \cap A_{20} = (0, 1/3) \cap (0, 1/20) = (0, 1/20) = A_{20}$

c) $k, t \in S$, $A_k \cup A_t = ?$

1) $k > t \Rightarrow \frac{1}{t} > \frac{1}{k}$ $A_k = (0, 1/k)$ $A_t = (0, 1/t)$

$A_k \cup A_t = (0, 1/t) = A_t$

2) $k < t \Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{1}{k}$ $A_k = (0, 1/k)$ $A_t = (0, 1/t)$

$A_k \cup A_t = (0, 1/k) = A_k$

d) $k, t \in S$, $A_k \cap A_t = ?$

1) $k > t \Rightarrow \frac{1}{t} > \frac{1}{k}$ $A_k = (0, 1/k)$ $A_t = (0, 1/t)$

$A_k \cap A_t = (0, 1/k) = A_k$

2) $k < t \Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{1}{k}$ $A_k = (0, 1/k)$ $A_t = (0, 1/t)$

$A_k \cap A_t = (0, 1/t) = A_t$

3 – $\{\underset{I.}{\{1\}}, \underset{II.}{\{2,3\}}, \underset{III.}{\{4,5,6\}}, \underset{IV.}{\{7,8,9,10\}}, \ldots\}$

$1+2+\ldots+40 = \frac{40 \cdot 41}{2} = 20 \cdot 41 = 820$ //

$1+2+\ldots+39 = \frac{39 \cdot 40}{2} = 780$

$\sum_{i=1}^{820} - \sum_{i=1}^{780} = \frac{820 \cdot 821}{2} - \frac{780 \cdot 781}{2} =$

4 – $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i, j \in S$

İspat // Aksini farzedelim.

$i \neq j$, $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ olsun $\Rightarrow i \neq j$, $\exists x \in B_i \cap B_j$

$\Rightarrow (x \in B_i \wedge x \in B_j)$ $i < j$ olsun.

$\Rightarrow \left[x \in A_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right) \wedge x \in A_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right)\right]$

$\Rightarrow \left[\left(x \in A_i \wedge x \notin \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right) \wedge \left(x \in A_j \wedge x \notin \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right)\right]$ (fark tanımı)

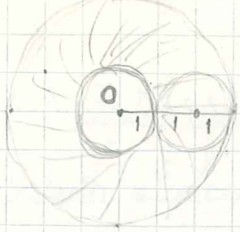
$\Rightarrow [x \in A_i \wedge (x \notin A_1 \wedge \ldots \wedge x \notin A_{i-1})] \wedge [x \in A_j \wedge (x \notin A_1 \wedge \ldots \wedge x \notin A_{j-1} \wedge \ldots \wedge x \in A_i \wedge \ldots \wedge x \in j-1)]$

$\Rightarrow (x \in A_i \wedge x \notin A_i \wedge x \in A_j)$

$\Rightarrow (x \in A_i \wedge x \notin A_i)$ çelişkidir ve yanlıştır.

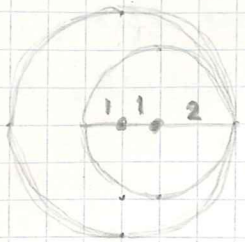
B ailesinin kümeleri ayrıktır.

5 -



$\mathcal{A} \Rightarrow \cup\mathcal{A} = \{x : \exists i \in I,\ x \in A_i\} = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \vee \ldots\}$

$\cap\mathcal{A} = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots\} = \phi$



$\mathcal{B} \Rightarrow \cup\mathcal{B} = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \ldots\}$ yarıçapı 3 olan daire

$\cap\mathcal{B} = \{x : A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots\}$ yarıçapı 1 olan daire bölgesi

6 - $A = \{1,2,3\}$

- $\phi \notin \mathcal{A}$ • $i \neq j$ $A_i \cap B_j = \phi$ • $A = \cup\mathcal{A}$

$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A$

a) $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ A kümesinin bir elemanıdır.

b) $\{\{1,2\},\{3\}\}$ " "

c) $\{\{2,3\},\{1\}\}$ " "

d) $\{\{1,3\},\{2\}\}$ " "

olmak üzere 4 tane ayrımı vardır.

7 - $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, $J \subseteq I$ $J = \{1,2,\ldots n\}$ $I = \{1,2,\ldots,n,n+1,\ldots p\}$ olsun.

a) $\bigcup_{i\in J} A_i \overset{?}{\subseteq} \bigcup_{i\in I} A_i$

İspat $\forall x \in \bigcup_{i\in J} A_i \Rightarrow (x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n)$

$\Rightarrow (x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \vee x \in A_{n+1} \vee \ldots \vee x \in A_p)$

$\Rightarrow (x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots \cup A_p)$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i$

b) $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in J} A_i$

İspat $\forall x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow (x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \wedge x \in A_{n+1} \wedge \ldots \wedge x \in A_p)$

$\Rightarrow (x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n)$

$\Rightarrow (x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{i\in J} A_i$

8- $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$

a) $\forall i \in I$ için $A_i \subseteq B \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$

İspat// $A_i \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A_i \Rightarrow x \in B)$ (Alt küme tanımı)

$\forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow (\exists k \in I,\ x \in A_k)$ (kümeler ailesinin bileşimi tanımı)

$\Rightarrow x \in B$ (Hipotezden)

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$

b)

İspat// $B \subseteq A_i \Leftrightarrow (\forall x \in B \Rightarrow x \in A_i)$ $\quad I = \{1, 2, \ldots, n\}$

$\forall x \in B \Rightarrow (\underbrace{x \in B \wedge x \in B \wedge \ldots \wedge x \in B}_{n \text{ tane}})$ ($\wedge$ bağlacının tek kuvvet öz.)

$\Rightarrow (x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge x \in A_3 \wedge \ldots \wedge x \in A_n)$

$\Rightarrow x \in (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i$

Tanım: (Sıralı ikili):

a ve b gibi iki eleman verilsin. Sıra önemli olmak üzere (a,b) şeklindeki ifadeye bir sıralı ikili denir.

(a,b) aralığı, $(a,b) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ ve } a < x < b\}$

(a,b) ikilisi,

Eşitlik =

(a,b) ve (c,d) ikilileri verilsin. $(a,b) = (c,d) \Rightarrow (a = c \wedge b = d)$

a: (a,b) sıralı ikilisinin birinci bileşeni.

b: " " " ikinci bileşeni.

$(a,b) \neq (b,a)$ genellikle farklıdır.

Tanım: (Sıralı üçlü)

a,b,c herhangi üç eleman olsun. Sıra önemli olmak üzere (a,b,c) ifadesine sıralı üçlü denir.

Tanım: (Sıralı n-li): $a_1, a_2, \ldots a_n$ herhangi n eleman olsun.

Sıra önemli olmak üzere $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ifadesine sıralı n-li denir.

a_1: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ Sıralı n'linin birinci bileşeni

a_2: " " " ikinci "

$\vdots$ $\vdots$

a_n " " " n-inci " dir.

Örnek/ $(10, -3, 2, 6)$ sıralı 4'lü

$(7, 11, 0, 8, 9, -1/2)$ sıralı 6-lıdır.

— Kümelerin Kartezyen Çarpımı —

Tanım: A, B iki küme olmak üzere,

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

kümesine "A ve B nin kartezyen çarpımı" denir.

$$B \times A = \{(x,y) : x \in B \wedge y \in A\}$$

$$A \times B \neq B \times A \text{ dır.}$$

$$A = B \Rightarrow A \times A = A^2 = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in A\} = \{(x,y) : x, y \in A\}$$

Tanım: $A \times A$'nın (x,x) şeklindeki elemanlarının kümesine $A \times A$ nın köşegeni denir.

Örnek// $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\}$$

$$A \times A = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$$

$\{(a,a), (b,b)\}$ $A \times A$ nın köşegenidir.

Teorem: A, B ve C herhangi kümeler olmak üzere.

1) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

4) $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$, $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \Rightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D)$

5) $A \times B = \emptyset \Rightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$

İspat/2 $A \times (B \cup C) = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in (B \cup C)\}$ (kart. çarp. tan.)

$= \{(x,y) : x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)\}$ (bileşim tanımı)

$= \{(x,y) : (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$ ($\wedge$ nin $\vee$ üz. dağ. öz)

$= \{(x,y) : (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C\}$

$= (A \times B) \cup (A \times C)$

3/ $\forall x \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C)$ kart. çar. tan.

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in A \times C$

$\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \cap (A \times C)$ kes. tan.

$\Leftrightarrow A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

4- $A \subseteq B \Rightarrow [A \times C \subseteq B \times C]$: hipotez $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\forall (x,y) \in A \times C \Rightarrow (x \in A \wedge y \in C)$ (kartezyen çarpım tanımı)

$\Rightarrow (x \in B \wedge y \in C)$ (hipotezden)

$\Rightarrow (x,y) \in B \times C$

$\Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$

5- $\underbrace{A \times B = \emptyset}_{p} \Rightarrow (\underbrace{A = \emptyset \vee B = \emptyset}_{q})$ $\equiv [(A = \emptyset \vee B = \emptyset)' \Rightarrow A \times B \neq \emptyset]$

$\equiv [(A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset) \Rightarrow A \times B \neq \emptyset]$

$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$

İspat// $(A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists x \in A \wedge \exists y \in B)$

$\Rightarrow \exists (x,y) \in A \times B$

$\Rightarrow A \times B \neq \emptyset$

Problemler :

1- $(x+y, 1) = (3, x-y)$ $x = ?$ $y = ?$

2- $A \subseteq B$ olduğuna göre $A \times A \subseteq A \times B$, $A \times B \subseteq B \times B$ önermelerinin doğru olduğunu ispatlayın.

3- A, B herhangi iki küme olmak üzere,

a) $A' \times B' = (A \times B)'$

b) $(A \times A) \cap (B \times B) = (A \cap B) \times (A \cap B)$ doğruluk değerlerini bulun.

4- A, B, C, D herhangi kümeler olmak üzere,

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$, $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

önermelerinin doğruluk değerlerini bulun.

$= \{(x,y) : (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C\}$

$= (A \times B) \cup (A \times C)$

3/ $\forall x \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C)$ kart. çar. tan.

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in A \times C$

$\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \cap (A \times C)$ kes. tan.

$\Leftrightarrow A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

4- $A \subseteq B \Rightarrow [A \times C \subseteq B \times C]$: hipotez $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\forall (x,y) \in A \times C \Rightarrow (x \in A \wedge y \in C)$ (kartezyen çarpım tanımı)

$\Rightarrow (x \in B \wedge y \in C)$ (hipotezden)

$\Rightarrow (x,y) \in B \times C$

$\Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$

5- $\underbrace{A \times B = \emptyset}_{p} \Rightarrow \underbrace{(A = \emptyset \vee B = \emptyset)}_{q}$ $\equiv [(A = \emptyset \vee B = \emptyset)' \Rightarrow A \times B \neq \emptyset]$

$\equiv [(A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset) \Rightarrow A \times B \neq \emptyset]$

$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$

ispat// $(A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists x \in A \wedge \exists y \in B)$

$\Rightarrow \exists (x,y) \in A \times B$

$\Rightarrow A \times B \neq \emptyset$

Problemler :

1- $(x+y, 1) = (3, x-y)$ $x = ?$ $y = ?$

2- $A \subseteq B$ olduğuna göre $A \times A \subseteq A \times B$, $A \times B \subseteq B \times B$ önermelerinin doğru olduğunu ispatlayın.

3- A, B herhangi iki küme olmak üzere,

a) $A' \times B' = (A \times B)'$

b) $(A \times A) \cap (B \times B) = (A \cap B) \times (A \cap B)$ doğruluk değerlerini bulun.

4- A, B, C, D herhangi kümeler olmak üzere,

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$, $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

önermelerinin doğruluk değerlerini bulun.

5- A, B, C kümeler ve

$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ olduğunu gösteriniz.

6- A, B, C kümeleri için, $A = B \cap C$ ise

a) $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$ b) $A \times A = (B \times C) \cap (C \times B)$

önermelerinin doğruluk değerlerini bulun.

7- Aşağıdaki kümeleri geometrik olarak açıklayın.

a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} \times \{-5\}$ c) $\mathbb{R} \times (1,3)$

d) $[1,3] \times \mathbb{R}$ e) $[1,3] \times (1,3)$ f) $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}$ ve $x^2+y^2=1\}$

g) $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}$ ve $x^2+y^2=1\} \times [0,1]\}$

h) $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ i) $\{(x,y,z) : x, y, z$ ve $x^2+y^2+z^2=1\}$

8- A, B sonlu kümeler olmak üzere

$n(A)=n$ $n(B)=m$ ise $n(A \times B)=n \cdot m$ olduğunu ispat edin.

9- A, B, C sonlu kümeler ve $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ olduğuna göre

$n(A)=15$ $n(B)=10$ $n(C)=8$ ise

a) $A \times B$ b) $A \times (B \times C)$ c) $A \times (B \cup C)$

kümelerinin eleman sayısını bulun.

Çözümler// 1- $(x+y, 1) = (3, x-y)$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=2 \quad y=1$$

2- $A \subseteq B$, $A \times A \subseteq A \times B$

$A \subseteq B \Rightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\forall (x,y) \in A \times A \Rightarrow (x \in A \wedge y \in A)$ (kart. çarp. tanımı)

$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in B)$

$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$

$\Rightarrow A \times A \subseteq A \times B$

3- a) $A' \times B' = (A \times B)'$

$= \{(x,y) : x \in A' \wedge y \in B'\}$ (kartezyen çarpımı tanımı)

$= \{(x,y) : x \notin A \wedge y \notin B\}$ (Tümleyen tanımı)

$(A\times B)' = \{(x,y) : (x,y) \notin A\times B\}$

$= \{(x,y) : x \notin A \vee y \notin B\}$ iki önerme denk değildir. Doğruluk değeri 0 //

4- $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

$= \{(x,y) : (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\in C\times D\}$

$= \{(x,y) : (x\in A \wedge y\in B)\wedge(x\in C \wedge y\in D)\}$ kar. çarp. tanımı

$= \{(x,y) : (x\in A \wedge x\in C)\wedge(y\in B \wedge y\in D)\}$ $\wedge$ nın değiş. ve birl. öz.

$= \{(x,y) : x\in A\cap C \wedge y\in B\cap D\}$ kes. tan.

$= (A\cap C)\times(B\cap D)$

5- $A\times(B\times C) \overset{?}{=} (A\times B)\times C$

$= \{(x,y,z) : x\in A \wedge [(y,z)\in B\times C]\}$

$= \{(x,y,z) : x\in A \wedge (y\in B \wedge z\in C)\}$

$= \{(x,y,z) : (x\in A \wedge y\in B)\wedge z\in C\}$

$= \{(x,y,z) : (x,y)\in A\times B \wedge z\in C\}$

$= (A\times B)\times C$

6- a/ $A\times A = (B\times B)\cap(C\times C)$

$A = B\cap C \rightarrow A\subseteq B\cap C$
$\rightarrow B\cap C\subseteq A$

$A\times A = (B\cap C)\times A$

$= (B\times A)\cap(C\times A)$

$= [B\times(B\cap C)]\cap[C\times(B\cap C)]$

$= [(B\times B)\cap(B\times C)]\cap[(C\times B)\cap(C\times C)]$

$= (B\times B)\cap(C\times C)\cap(B\times C)\cap(C\times B)$

$(B\times B)\cap(C\times C) = \{(x,y) : (x,y)\in B\times B \wedge (x,y)\in C\times C\}$

?

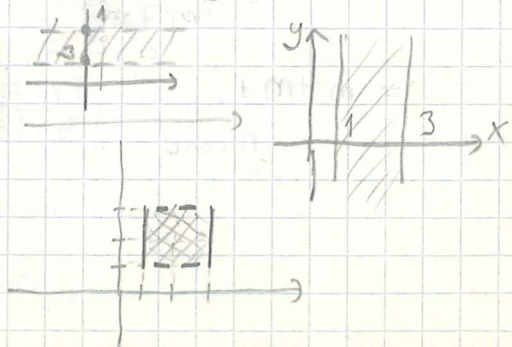
7- a) $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ iki boyutlu düzlemdeki noktalar kümesi.

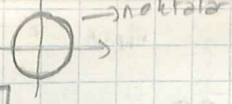
b) $\mathbb{R}\times\{-5\} = \{(x,y) : x\in\mathbb{R} \wedge y=-5\}$ $y=-5$ doğrusu.

c) $\mathbb{R}\times(1,3) = \{(x,y) : x\in\mathbb{R} \wedge y\in(1,3)\}$

d) $[1,3]\times\mathbb{R} = \{(x,y) : x\in[1,3] \wedge y\in\mathbb{R}\}$

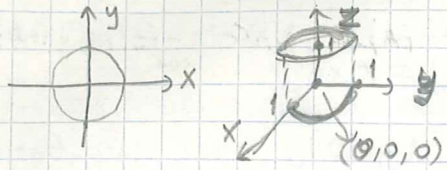
e) $[1,3]\times(1,3) = \{(x,y) : x\in[1,3] \wedge y\in(1,3)\}$



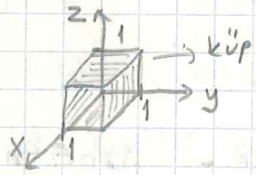
f) $\{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2=1\}$ 

g) $\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2=1\} \times [0,1]$

$= \{(x,y,z) : x^2+y^2=1 \wedge z \in [0,1]\}$



h) $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = \{(x,y,z) : x,y,z \in [0,1]\}$



i)

küre.

8- $n(A)=n \quad n(B)=m \quad n(A \times B) \overset{?}{=} n.m$

$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}, \quad B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$

$A=\{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\dots\cup\{a_n\} \quad B=\{b_1\}\cup\{b_2\}\cup\dots\cup\{b_m\}$

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$A\times B=\{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\dots\cup\{a_n\}\times B$

$=(\{a_1\}\times B)\cup(\{a_2\}\times B)\cup\dots\cup(\{a_n\}\times B)$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-\underbrace{n(A\cap B)}_{\emptyset \text{ ise}} = n(A)+n(B)$ dir.

$A\times B=(\{a_1\}\times B)\cap(\{a_2\}\times B)=\emptyset \Rightarrow$

$(\{a_i\}\times B)\cap(\{a_j\}\times B)=\emptyset \quad i\neq j$ ise

$n(A\times B)=n(\{a_1\}\times B)+n(\{a_2\}\times B)+\dots+n(\{a_n\}\times B)$

$\{a_1\}\times B=\{a_1\}\times[\{b_1\}\cup\{b_2\}\cup\dots\cup\{b_m\}]$

$=(\{a_1\}\times\{b_1\})\cup(\{a_1\}\times\{b_2\})\cup\dots(\{a_1\}\times\{b_m\})$

$n(\{a_1\}\times B)=\underbrace{n(\{a_1\}\times\{b_1\})}_{1}+\underbrace{n(\{a_1\}\times\{b_2\})}_{1}+\dots n(\underbrace{\{a_1\}\times\{b_m\}}_{1})$

$=\underbrace{1+1+\dots+1}_{m \text{ tane}}$

$=\underbrace{m+m+\dots+n}_{n\text{tane}}=m.n$

9- $n(A)=15 \quad n(B)=10 \quad n(C)=8 \qquad A\cap B = A\cap C = B\cap C = \emptyset$

$$n(A\times B) = n.m = 10.15 = 150$$

$$n[A\times(B\cup C)] = n(A).n(B\cup C) = n(A)[n(B)+n(C)-n(B\cap C)] = 15(10+8) = 15.18$$

$$n(A\times B\times C) = n[A\times(B\times C)] = n(A).n(B\times C) = n(A).n(B).n(C) = 15.10.8 = 80.15.$$

Tanım: 1) A, B, C kümeleri verildiğinde

$A\times B\times C = \{(x,y,z) : x\in A \wedge y\in B \wedge z\in C\}$ kümesine,

A, B, C kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

2) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gibi n tane küme verildiğinde

$A_1\times A_2\times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1\in A_1 \wedge x_2\in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n\in A_n\}$ kümesine,

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

$$\underbrace{A\times A\times \ldots \times A}_{n \text{ tane}} = A^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in A\}$$

$A = \mathbb{R}$ ise $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times \ldots \times\mathbb{R}}_{n \text{ tane}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

$n=2$ ise $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y\in\mathbb{R}\}$ 2 boyutlu öklid uzayı.

$n=3$ ise $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z\in\mathbb{R}\}$ 3 boyutlu öklid uzayı.

- BAĞINTI -

Bir sınıftaki öğrencilerin kümesi A olsun. "x ve y aynı burçtandır." önermesi (cümlesi) veriliyor. Bu önermenin doğruluk kümesi D olsun.

$D = \{(x,y) : x,y\in A$ ve x ile y aynı burçtandır.$\}$

"x ve y aynı burçtandır" önermesi ile $(x,y)\in D$ önermesi aynı anlamı vermektedir.

Tanım: Boş olmayan bir A kümesi verilsin. $A\times A$ nın boş olmayan her alt kümesine A' kümesinde bir bağıntı (1-1 bağıntı) denir.

Örnek // $A = \{x : x$ Samsun ili nüfusuna kayıtlıdır.$\}$

$\{(x,y) : x,y\in A$ ve x, y nin annesidir.$\}$

$\{(x,y) : x,y\in A$ ve x, y nin dedesidir.$\}$

$\{(x,y) : x,y\in A$ ve x, y nin teyzesidir.$\}$

$\{(x,y) : x,y\in A$ ve x, y den gençtir.$\}$

Tanım: Boş olmayan iki küme A ve B olsun.

$A \times B$ nin her boş olmayan alt kümesine A dan B ye bir bağıntı denir.

(bir 2-li bağıntı)

Genel olarak α, β, γ gibi gösterilir.

Örnek // $A=\{4,6,9,15\}$, $B=\{2,3,5\}$ ve

$\beta=\{(x,y) : x\in A \wedge y\in B \wedge y|x\}$

$=\{(4,2),(6,2),(6,3),(9,3),(15,3),(15,5)\}$

Tanım: A kümesinden B kümesine bir β bağıntısı verilsin.

$(x,y)\in\beta$ "ise" B nin y elemanı, A nın x elemanı ile β bağıntısı yardımıyla bağlıdır." Veya "A nın x elemanı, B nin y elemanı ile eşlenmiştir" denir. Sembolik olarak,

1) $y\beta x$: y elemanı β yardımıyla x'e bağlıdır. $((x,y)\in\beta)$

2) $x \to y$: x elemanı y ile eşlenmiştir. $((x,y)\in\beta)$

$(x,y)\in\beta \iff y\beta x \iff x\to y$

Örnek // $\beta=\{(x,y) : x,y\in\mathbb{N} \text{ ve } x+2y=4\}$ bağıntısı,

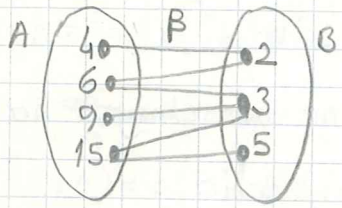
$y\beta x \iff x+2y=4$ şeklinde de verilir.

Bağıntının Şeması;

$A, B \Rightarrow \beta \subseteq A\times B$

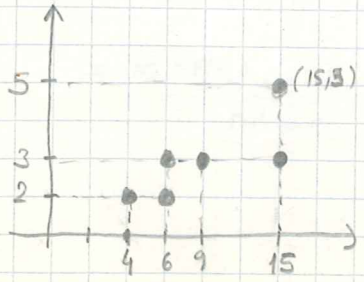
Örnek // $A=\{4,6,9,15\}$ $B=\{2,3,5\}$

$\beta=\{(4,2),(6,2),(6,3),(9,3),(15,3),(15,5)\}$



Venn Şeması.

Bağıntının Grafiği;



Tanım: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri verilsin,

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ kümesi için,

$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ olmak üzere A dan B ye olan bir bağıntıya, bir n-li bağıntı denir.

Tanım: A kümesinden B kümesine bir,

$\beta = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B,\ y \beta x\}$ bağıntısı verilsin.

$\{(y,x) : (x,y) \in \beta\}$ bağıntısına β bağıntısının ters bağıntısı denir. Ve β^{-1} ile gösterilir.

$\beta^{-1} = \{(y,x) : x \in A \wedge y \in B \wedge y \beta x\}$

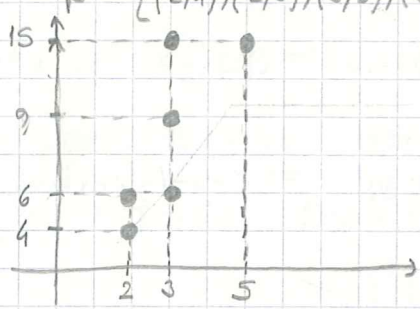
Örnek // $A = \{4,6,9,15\}$ $B = \{2,3,5\}$

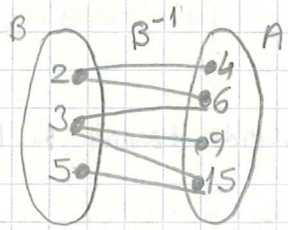
$\beta = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B \wedge y | x\}$ ise β liste yönteniyle yazılırsa,

$\beta = \{(4,2),(6,2),(6,3),(9,3),(15,3),(15,5)\}$

$\beta^{-1} = \{(y,x) : y \in B \wedge x \in A \wedge y | x\}$ ise β^{-1} yazılacak olursa,

$\beta^{-1} = \{(2,4),(2,6),(3,6),(3,9),(3,15),(5,15)\}$





Venn Şeması

- İki Bağıntının Bileşkesi -

Tanım: $B \cap C \neq \emptyset$ olmak üzere A dan B ye bir β ve C den D'ye bir γ bağıntısı verilsin. Yani

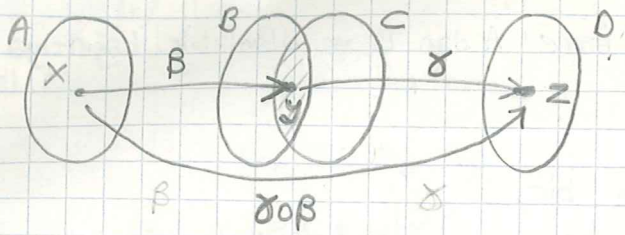
$\beta = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B \wedge y \beta x\}$

$\gamma = \{(u,v) : u \in C \wedge v \in D \wedge v \gamma u\}$ olsun.

A'dan D kümesine, $\{(x,z) : \exists y \in B \cap C$ için $(x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \gamma\}$ bağıntısına β ve γ bağıntılarının bileşkesi denir.

Bileşke bağıntı sembolik olarak

$\gamma o \beta$ yazılır ve "β bileşke γ" diye okunur.



Örnek // $A=\{4,6,9,15\}$ $B=\{2,3,5,17\}$ $C=\{2,3,5,7\}$ $D=\{8,10,12\}$

$\beta=\{(x,y): x\in A \wedge y\in B \wedge y|x\}$ $B\cap C=\{2,3,5\}$

$\gamma=\{(x,y): x\in C \wedge y\in D \wedge x|y\}$

bileşke bağıntısını özellik ve liste yönteniyle yazacak olursak,

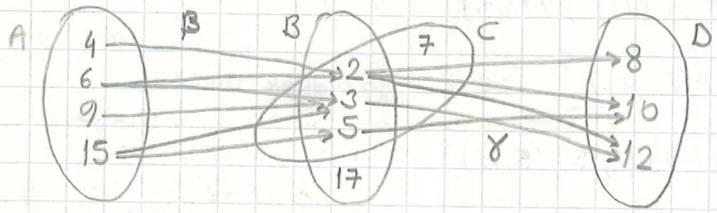
$\gamma o \beta=\{(x,z): \exists y\in B\cap C, (x,y)\in\beta \wedge (y,z)\in\gamma\}$

$\beta=\{(4,2),(6,2),(6,3),(9,3),(15,3),(15,5)\}$

$\gamma=\{(2,8),(2,10),(2,12),(3,12),(5,10)\}$

$\gamma o \beta=\{(4,8),(4,10),(4,12),(6,8),(6,10),(6,12),(9,12),(15,12),(15,10)\}$

$\beta o \gamma=?$



Problemler:

1- $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinde tanımlı β bağıntısı $y\beta x \Leftrightarrow x=y-1$ şeklinde veriliyor. β bağıntısını liste yönteniyle yazınız.

2- $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinde tanımlanan $\beta=\{(2,5),(3,2),(3,7),(4,4),(6,4),(8,1)\}$ bağıntısı veriliyor. $\beta^{-1}o\beta$ bağıntısını liste yöntemiyle yazınız.

Çözümler // 1- $x=0 \Rightarrow y=1$ $\beta=\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$
$x=1 \Rightarrow y=2$

2- $\beta^{-1}=\{(5,2),(2,3),(7,3),(4,4),(4,6),(1,8)\}$

$\beta^{-1}o\beta=\{(x,z): x,y\in\beta \wedge y,z\in\beta^{-1}\}=\{(2,2),(3,3),(4,4),(4,6),(6,4),(6,6),(8,8)\}$

Tanım : (Özdeşlik Bağıntısı) :

A bir küme olmak üzere $A \times A$ nın köşegen elemanları ile teşkil edilen bağıntıya, A'nın özdeşlik bağıntısı denir. A'nın özdeşlik bağıntısı I_A ile gösterilir.

Örnek // $A=\{0,1,2,3\}$ $I_A=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$

- Bağıntının Özellikleri -

Tanım : (Yansıma Özelliği) :

β, A kümesinde tanımlı bir bağıntı olsun.

$\forall x(x \in A \Rightarrow (x,x) \in \beta)$ ise "β nın yansıma özelliği vardır." veya "β yansıyan bir bağıntıdır" denir.

Tanım : (Simetri Özelliği) :

β, A kümesinde tanımlanan bir bağıntı olsun. $(x,y) \in A$ olmak üzere,

$\forall (x,y) \in \beta \Rightarrow (y,x) \in \beta$ önermesi doğru ise β nın simetri özelliği vardır denir. (Veya "β simetrik bir bağıntıdır" denir.)

Örnek // $A=\{1,2,3\}$ $\beta=\{(1,1),(2,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$

β bağıntısı simetriktir, yansıyan değildir.

Tanım : (Ters Simetri Özelliği) :

A kümesinde tanımlı bir β bağıntısı verilsin. $(x,y) \in A$ olmak üzere,

$x \neq y$ ve $(x,y) \in \beta \Rightarrow (y,x) \notin \beta$ dır. Önermesi doğru ise β bağıntısı A kümesinde ters simetri özelliğine sahiptir denir.

Örnek // $A=\{a,b,c\}$ $\beta=\{(b,c),(a,b),(a,a)\}$

$(c,b) \notin \beta$ $(b,a) \notin \beta$ $a=a$ (β, ters simetriktir.)

Tanım : (Geçişme Özelliği) :

A kümesinde tanımlı bir β bağıntısı verilsin. $x,y,z \in A$ olmak üzere,

$(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta \Rightarrow (x,z) \in \beta$ önermesi doğru ise "β bağıntısının geçişme özelliği vardır" denir.

Örnek // $A=\{a,b,c\}$ $\beta=\{(a,c),(b,b),(c,b),(a,b)\}$

β'nın geçişme özelliği vardır.

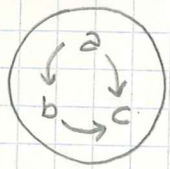
(β bağıntısı geçişli bir bağıntıdır.)

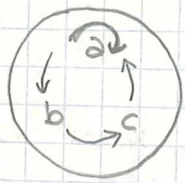
Problemler:

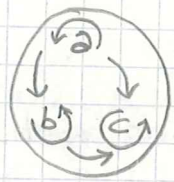
1 - Doğal sayılar kümesinde aşağıdaki önermelerle verilen bağıntıların özelliklerini inceleyin.

a) $x \leq y$ b) $x \mid y$ c) $x+y=10$

2 - $A=\{a,b,c\}$ kümesinde tanımlanan aşağıdaki bağıntıların özelliklerini inceleyin

a)


b)


c)


d)


3 - $\beta=\{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{N}-\{0\} \wedge xy \text{ tek sayı}\}$ bağıntısının özelliklerini inceleyin.

4 - γ ve β, A kümesinde tanımlanan iki bağıntı olsun. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulun.

a - β ve γ yansıyan ise $\beta \cap \gamma$ da yansıyandır.

b - β yansıyan ise $\beta \cap \beta^{-1} \neq \emptyset$ dir.

c - β ve γ simetrik ise $\beta \cup \gamma$ da simetriktir.

d - β simetrik ise $\beta \cap \beta^{-1} \neq \emptyset$ dir.

e - β ve γ ters simetrik ise $\beta \cup \gamma$ da ters simetriktir.

f - β ve γ geçişli ise $\beta \cap \gamma$ da geçişlidir.

5 - Bir üçgenin A^0 nın ölçüsü 55^0 ise B ve C açılarının ölçüleri arasındaki bağıntıyı özellik yöntemiyle yazın. Bu bağıntı simetrik midir?

6 - $A=\{1,2,3,4\}$ kümesinde tanımlanan bir β bağıntısının $(1,1),(2,3),(3,4)$ elemanlarını içerdiği bilinmektedir.

a) β yansıyan olacak şekilde, β nın elemanlarını yazın. Bu soruya birden çok cevap bulmak mümkün müdür?

b) β simetrik olmak üzere β bağıntısının elemanlarını yazın. Birden çok cevap bulmak mümkün müdür?

c) β, yansıyan, simetrik, geçişli olduğuna göre, β nın elemanlarını yazın. Birden çok cevap bulmak mümkün müdür?

7- Boş olmayan bir A kümesinde tanımlanan tüm bağıntıların simetrik olması için A kümesi nasıl bir küme olmalıdır?

Çözümler

1 - a- $(x \leq y) \equiv (x < y \vee x = y)$

$\forall x \in \mathbb{N},\ x = x \Rightarrow x \leq x \Rightarrow x, x \in \beta$ yansıyandır.

$\forall (x,y) \in \mathbb{N},\ (x,y) \in \beta \Rightarrow x \leq y \Rightarrow y \overset{?}{\leq} x$

$x=1, y=2 \quad (1 \leq 2) \in \beta \Rightarrow (1,2) \in \beta$ simetri değil

$(2,1) \notin \beta$ ters simetri. geçişme vardır.

$\forall x,y,z \in \mathbb{N} : (x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad (x,z) \in \beta$

b- $\forall x \in \mathbb{N} : x / x \Rightarrow (x,x) \notin \beta$

$x = 0 \Rightarrow \frac{0}{0}$ yansıyan değil.

$(x,y) \in \mathbb{N},\ (x,y) \in \beta \Rightarrow x / y$

$x=2\ y=4$, $2/4$ fakat $4 \not/ 2$ simetri yoktur. ters simetri var.

$\forall x,y,z \in \mathbb{N} \Rightarrow (x/y) \wedge (y/z) \Rightarrow x/z$ geçişme var.

2- a) $\beta = \{(a,b),(a,c),(b,c)\}$

yansıyan değil, simetri değil, ters simetri, geçişme var.

b) $\beta = \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,a)\}$

yansıyan değil, simetri değil, ters simetri, geçişme yok.

c) $\beta = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c),(a,c)\}$

yansıma var, simetri değil, ters simetri, geçişli.

d) $\beta = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\}$

yansıyan, simetri, ters simetri yok, geçişli.

3- i) $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x.x = x^2$ tek sayı mıdır?

$x=4 \Rightarrow 4.4 = 16$ tek sayı değil. $(4,4) \notin \beta$ yansıyan değil.

ii) $\forall x,y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (x,y) \in \beta \Rightarrow xy$ tek sayı.

$\Rightarrow y.x$ tek sayı $(y,x) \in \beta$ simetri var. ters sim yok.

iii) $\forall x,y,z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta \Rightarrow x.y$ tek sayı $\wedge\ y.z$ tek sayı

$\Rightarrow x.z$ tek sayıdır. geçişme var.

4- a) β ve γ yansıyan ise $\beta \cap \gamma$ da yansıyandır.

İspat// β ve γ yansıyan $\Rightarrow [\forall x \in A, (x,x) \in \beta] \wedge [\forall x \in A, (x,x) \in \gamma]$

$\Rightarrow \forall x \in A, (x,x) \in \beta \wedge (x,x) \in \gamma$

$\Rightarrow \forall x \in A, (x,x) \in \beta \cap \gamma$ (kesişim tanımı)

$\Rightarrow \beta \cap \gamma$ yansıyandır.

b) β yansıyan ise $\beta \cap \beta^{-1} \neq \emptyset$ dir.

İspat// β yansıyan $\Rightarrow [\forall x \in A, (x,x) \in \beta]$ (yansıyan bağıntı tanımı)

$\Rightarrow [\forall x \in A, (x,x) \in \beta^{-1}]$

$\Rightarrow \forall x \in A, (x,x) \in \beta \wedge (x,x) \in \beta^{-1}$

$\Rightarrow \forall x \in A, (x,x) \in \beta \cap \beta^{-1}$ (kesişim tanımı)

$\Rightarrow \beta \cap \beta^{-1} \neq \emptyset$

c) β ve γ simetrik ise $\beta \cup \gamma$ da simetriktir.

İspat// β ve γ simetrik $\Rightarrow$

$\Rightarrow [\forall x,y \in A, (x,y) \in \beta \Rightarrow (y,x) \in \beta] \wedge [\forall x,y \in A, (x,y) \in \gamma \Rightarrow (y,x) \in \gamma]$

$\Rightarrow [(x,y) \in \beta \vee (y,x) \in \gamma] \Rightarrow [(y,x) \in \beta \vee (y,x) \in \gamma]$

$\Rightarrow [(x,y) \in \beta \cup \gamma \Rightarrow (x,y) \in \beta \cup \gamma]$

$\Rightarrow \beta \cup \gamma$ simetriktir.

d) β simetrik ise $\beta \cap \beta^{-1} \neq \emptyset$ dir.

İspat// β simetrik ise

$\Rightarrow [\forall (x,y) \in A, (x,y) \in \beta \wedge (y,x) \in \beta]$

$\Rightarrow [(y,x) \in \beta^{-1} \wedge (x,y) \in \beta^{-1}]$

$\Rightarrow (x,y) \in \beta \wedge (x,y) \in \beta^{-1} \Rightarrow x,y \in \beta \cap \beta^{-1} \Rightarrow \beta \cap \beta^{-1} \neq \emptyset$

f) β ve γ geçişli ise $\beta \cap \gamma$ da geçişlidir.

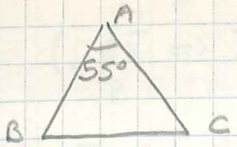
İspat// β geçişli ve γ geçişli $\Rightarrow$

$\Rightarrow [\forall x,y,z \in A, (x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta \Rightarrow (x,z) \in \beta] \wedge [\forall x,y,z \in A, (x,y) \in \gamma \wedge (y,z) \in \gamma \Rightarrow (x,z) \in \gamma]$

$\Rightarrow [[(x,y) \in \beta \wedge (x,y) \in \gamma] \wedge [(y,z) \in \beta \wedge (y,z) \in \gamma]] \Rightarrow [(x,z) \in \beta \wedge (x,z) \in \gamma]$

$\Rightarrow [(x,y) \in \beta \cap \gamma \wedge (y,z) \in \beta \cap \gamma] \Rightarrow [(x,z) \in \beta \cap \gamma]$

$\Rightarrow \beta \cap \gamma$ geçişme özelliğine sahiptir.

5- 

$\beta = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R} \quad x+y = 125^\circ\}$ simetriktir.

6- a) $\beta = \{(1,1),(2,3),(3,4),\underline{(2,2)},\underline{(3,3)},\underline{(4,4)}\}$ $(4,3)$ ilave edilebilir.

b) $\beta = \{(1,1),(2,3),(3,4),\underline{(3,2)},\underline{(4,3)}\}$ $(4,4)$ ilave edilebilir.

c) $\beta = \{(1,1),(2,3),(3,4),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(3,1),(3,2),(4,3),(2,4),(4,2)\}$

?

7- $A = \{a\}$ $A \times A = \{(a,a)\}$ $\beta = \{(a,a)\}$ küme tek elemanlı olmalıdır.

Tanım: (Denklik = Eşdeğerlik Bağıntısı):

Bir A kümesinde tanımlanan bir bağıntının yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa; "β, A kümesinde bir denklik bağıntısıdır" denir.

Örnek// $A = \{x : x$ T.C. vatandaşıdır.$\}$ kümesinde tanımlanan

$\beta = \{(x,y) : x,y \in A$ ve x ile y aynı ilde doğmuştur$\}$ bağıntısı denklik bağıntısı mıdır?

i) $\forall x \in A,\ (x,x) \in \beta$ yansıyandır.

ii) $\forall x,y \in A,\ (x,y) \in \beta \Rightarrow (y,x) \in \beta$ simetriktir.

iii) $\forall x,y,z \in A,\ (x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta \Rightarrow (x,z) \in \beta$ geçişlidir.

Örnek// $\beta = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Z}$ ve $x-y$ çift tamsayıdır$\}$

i) $\forall x \in \mathbb{Z},\ x-x=0$ çifttir. $(x,x) \in \beta$ doğrudur. yansıyandır.

ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{Z},\ (x,y) \in \beta \Rightarrow x-y$ çifttir $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x-y = 2k$

$\Rightarrow -(x-y) = -2k \Rightarrow (y-x) = 2(-k),\ -k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y-x$ çift tamsayı $(y,x) \in \beta$ dır. simetriktir.

iii) $\forall x,y,z \in \mathbb{Z},\ (x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta \Rightarrow x-y$ çift ve $y-z$ çift tamsayıdır.

$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x-y = 2k) \wedge (\exists r \in \mathbb{Z},\ y-z = 2r)$

$\Rightarrow (x-y)+(y-z) = 2k+2r$

$\Rightarrow x-z = 2(k+r),\ k+r \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x-z$ çifttir.

$\Rightarrow (x,z) \in \beta$ geçişme vardır.

β bağıntısı $\mathbb{Z}$ kümesinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım: Denklik (= Eşdeğerlik) Sınıfları :

Bir A kümesinde tanımlı bir β denklik bağıntısı verilsin.

$(x,y)\in\beta$ ise "y elemanı β denklik bağıntısı ile x elemanına denktir" denir.

A'nın bir x elemanına denk olan tüm elemanlarının kümesine x'in denklik sınıfı denir. $\bar{x}$ veya $[x]$ ile gösterilir.

$$\bar{x}=\{y : y\in A \wedge (x,y)\in\beta\}$$

Örnek// $\beta=\{(x,y) : x,y\in\mathbb{Z}$ ve $x-y$ çift tamsayıdır.$\}$

1 ve 2 tamsayılarının denklik sınıflarını bulalım.

$\bar{1}=\{y : y\in\mathbb{Z} \wedge (1,y)\in\beta\}=\{y : y\in\mathbb{Z} \wedge 1-y$ çift tamsayı$\}$

$\bar{1}=\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}=T$

$\bar{2}=\{y : y\in\mathbb{Z} \wedge (2,y)\in\beta\}=\{y : y\in\mathbb{Z} \wedge 2-y$ çift tamsayı$\}$

$\bar{2}=\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}=Ç$

Teorem: Bir A kümesi ve bu kümede tanımlı bir β denklik bağıntısı verilsin.

a) A'nın her elemanının boş kümeden farklı en az bir denklik sınıfı vardır.

b) A'nın herhangi iki elemanının denklik sınıfı ya ayrıktır ya da eşittir.

c) Tüm denklik sınıflarının birleşimi A ya eşittir.

İspat// a) $\forall x\in A,\ (x,x)\in\beta \Rightarrow x\in\bar{x} \Rightarrow \bar{x}\neq\emptyset$

b) $x,y\in A$, $\bar{x}$: x'in denklik sınıfı, $\bar{y}$: y'nin denklik sınıfı olsun.

$\Rightarrow y\in\bar{x}$ veya $y\notin\bar{x}$

i) $y\in\bar{x}$ olsun ve $a\in\bar{y}$ alalım.

$$(y\in\bar{x} \wedge a\in\bar{y}) \Rightarrow (x,y)\in\beta \wedge (y,a)\in\beta$$

$$\Rightarrow (x,a)\in\beta$$

$$\Rightarrow (a,x)\in\beta \Rightarrow a\in\bar{x}$$

$$[\forall a\in\bar{y} \Rightarrow a\in\bar{x}] \Rightarrow \bar{y}\subseteq\bar{x}$$

Benzer şekilde, $\forall a\in\bar{x} \Rightarrow a\in\bar{y}$

$$\Rightarrow \bar{x}\subseteq\bar{y}$$

O halde, $\bar{x}=\bar{y}$ olur.

ii) $(\underset{p}{y \notin \bar{x}} \Rightarrow \underset{q}{\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset}) \overset{?}{\equiv} (\underset{q'}{\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset} \Rightarrow \underset{p'}{y \in \bar{x}})$

$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A,\ a \in \bar{x} \cap \bar{y}$ boş küme tanımı

$\Rightarrow \exists a \in A,\ (a \in \bar{x} \wedge a \in \bar{y})$ kesişim tanımı

$\Rightarrow \exists a \in A,\ ((x,a) \in \beta \wedge (y,a) \in \beta)$ denklik sınıfı tanımı

$\Rightarrow (x,a) \in \beta \wedge (a,y) \in \beta$ simetri öz.

$\Rightarrow (x,y) \in \beta$ geçişme öz.

$\Rightarrow y \in \bar{x}$

Tanım: (Bölüm Kümesi)

Bir A kümesinde tanımlı bir β denklik bağıntısı verilsin. β bağıntısının A'dan ayırdığı tüm denklik sınıflarının kümesine A'nın βya göre bölüm kümesi denir. Ve A/β ile gösterilir.

Örnek// $\beta = \{(x,y) : x,y \in Z$ ve $x-y$ çift tamsayıdır$\}$

$\bar{1} = T$, $\bar{2} = Ç$

$Z/\beta = \{\bar{1}, \bar{2}\} = \{T, Ç\}$

Denklik Bağıntısı ve Ayrımlar:

Teorem: Bir A kümesinde tanımlı bir β denklik bağıntısının tanımladığı bölüm kümesi A'nın bir ayrımını oluşturur.

İspat// A kümesinde tanımlı β denklik bağıntısının tanımladığı bölüm kümesi A/β dır.

- Bölüm kümesindeki her bir denklik sınıfı boş kümeden farklıdır.
- Bölüm kümesindeki herhangi iki denklik sınıfı ayrık iki kümedir.
- Bölüm kümesindeki denklik sınıflarının birleşimi A kümesine eşittir.

Bunların doğru olması teoremin ispatını tamamlar.

Teorem: Bir A kümesinin her bir ayrımı, ayrımdaki her küme bir denklik sınıfı olacak biçimde, A kümesinde bir denklik bağıntısı tanımlar.

İspat// A kümesinin $\{B_i\}_{i \in I}$ ayrımını gözönüne alalım. Ayrımı oluşturan B_i kümelerinden her biri, A kümesinin bir alt kümesidir. Bu alt kümeleri denklik sınıfı olarak alan bir denklik bağıntısının bulunduğunu ispatlayalım.

A kümesinde β bağıntısını,

$(x,y)\in\beta \Leftrightarrow$ x ile y aynı bir B_i kümesindedir, biçiminde tanımlayalım.

$\forall x\in A$ için $x\in B_i$ olacak biçimde I indisler kümesinde yalnız bir tane i elemanı vardır. Bu nedenle bağıntı yansıyandır.

$(x,y)\in\beta \Leftrightarrow x,y\in B_i \Leftrightarrow y,x\in B_i \Leftrightarrow (y,x)\in\beta$ olduğundan β simetriktir.

$[(x,y)\in\beta$ ve $(y,z)\in\beta] \Leftrightarrow [x,y\in B_i$ ve $y,z\in B_i]$

$\Leftrightarrow x,z\in B_i \Leftrightarrow (x,z)\in\beta$ olduğundan β geçişlidir.

Buna göre β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Örnek // $A=\{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere A kümesinin $\{\{1,3,5\},\{2,4\}\}$ ayrımının tanımladığı denklik bağıntısını yazınız?

β bağıntısının A kümesinden ayırdığı denklik sınıfları, $\{1,3,5\}$ ve $\{2,4\}$ tür. Denklik sınıflarında bulunan elemanlar birbirlerine denk olduklarından,

$\beta=\{(1,1),(3,3),(5,5),(1,3),(3,1),(1,5),(5,1),(3,5),(5,3),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$ olur.

Alıştırmalar //

1)

Sıralama Bağıntısı :

Bir kümede tanımlanan bir bağıntının yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa bu bağıntıya bir sıralama bağıntısı denir. Bir A kümesinde bir sıralama bağıntısı tanımlı ise A kümesine sıralı küme denir. Bir kümede tanımlı sıralama bağıntısı $\lesssim$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$x, y \in \lesssim \iff x \lesssim y$$

Okunuşu, $x \lesssim y$: "x, y'den önce gelir veya eşittir."

Özel olarak $x \lesssim y$ ve $x \neq y$ ise : $x < y$ yazılır. Okunuşu, "x, y'den önce gelir."

Tanım : Bir A kümesinde tanımlı bir sıralama bağıntısı verilsin. $\forall x, y \in A$ için (x,y) çifti bu bağıntıya göre karşılaştırılabilir. Yani "$x \lesssim y$ veya $y \lesssim x$ önermesi doğru ise A kümesine tam sıralı denir. Aksi halde A kümesine parçalı (kısmi) sıralıdır denir.

Örnek // $A = \{1,2\}$ ise bu kümenin kuvvet kümesinde ($P(A)$'da) $\subseteq$ bağıntısı tanımlanıyor. Bu bağıntının sıralama bağıntısı ve nasıl sıralı olduğunu gösterelim.

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$$

$$\subseteq = \{(x,y) : x, y \in P(A) \wedge x \subseteq y\}$$

$$\subseteq = \{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{1\}), (\emptyset,\{2\}), (\{1\},\{1\}), (\{1\},A), (\{2\},\{2\}), (\{2\},A), (A,A)\}$$

Yansıma, ters simetri ve geçişme var.

$(\emptyset, \{1\}) \in \subseteq \Rightarrow \emptyset \subseteq \{1\}$

$\emptyset, \{1\}$ elemanları karşılaştırılabilir elemanlardır.

$\{1\}, \{2\} \in P(A) \Rightarrow \{1\} \subseteq \{2\} \vee \{2\} \subseteq \{1\}$ önermesi yanlıştır.

$\{1\}, \{2\}$ elemanları karşılaştırılamayan elemanlardır.

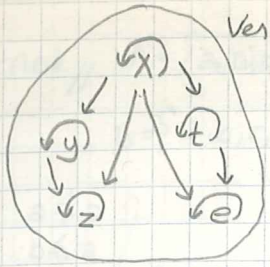
$P(A)$ kuvvet kümesi parçalı sıralıdır.

Örnek // $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinde $\lesssim$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır. A kümesi tam sıralıdır.

Sıralama Bağıntısının Venn Şeması ve Çizelgesi :

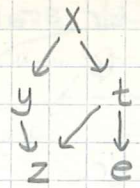
Örnek // $A = \{x,y,z,t,e\}$ kümesinde $\lesssim$ bağıntısı veriliyor.

Venn şeması



$x \preccurlyeq y$

Çizelge



A kümesi parçalı sıralıdır.

(Tüm elemanları karşılaştırılamadığı için) iyi sıralı değildir.

Teorem : Bir A kümesinde tanımlı bir sıralama bağıntısının tersi de, A kümesinde bir sıralama bağıntısıdır.

İspat // β, A kümesinde bir sıralama bağıntısıdır.

$\beta \subseteq A \times A \Rightarrow \beta$, A'da bir bağıntıdır.

$\Rightarrow \beta^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in \beta\} \subseteq A \times A$

i - β yansıyandır $\Rightarrow \forall x \in A, (x,x) \in \beta \Rightarrow (x,x) \in \beta^{-1} \Rightarrow \beta^{-1}$ yansıyandır.

ii - β ters simetriktir $\Rightarrow \forall (x,y) \in A \wedge x \neq y, (x,y) \in \beta \Rightarrow (y,x) \notin \beta$

$(y,x) \in \beta \Rightarrow (x,y) \notin \beta^{-1} \Rightarrow \beta^{-1}$ ters simetriktir.

iii - β geçişlidir $\Rightarrow [\forall x,y,z \in A, (x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta \Rightarrow (x,z) \in \beta]$

$\Rightarrow (y,x) \notin \beta \wedge (z,y) \notin \beta \Rightarrow (z,x) \notin \beta$ (β nın ters sim. öz.)

$\Rightarrow (z,y) \notin \beta \wedge (y,x) \notin \beta \Rightarrow (z,x) \notin \beta$ ($\wedge$ nın değişme öz.)

$\Rightarrow (z,y) \in \beta^{-1} \wedge (y,x) \in \beta^{-1} \Rightarrow (z,x) \in \beta^{-1}$ (ters bağıntı tanımı)

$\Rightarrow \beta^{-1}$ geçişlidir.

Sıralama Bağıntısı ile İlgili Kavramlar :

Tanım : (Büyükçe Eleman) :

Bir A kümesinde bir $\preccurlyeq$ sıralama bağıntısı verilsin. Ve $m \in A$ olsun. A'nın $m \preccurlyeq x$ olacak şekilde m'den farklı hiçbir elemanı yoksa, m'ye A'nın bir büyükçe elemanı denir. Yani $m \preccurlyeq x \Leftrightarrow m = x$ ise.

Tanım : (Küçükçe Eleman) :

Bir A kümesinde bir $\preccurlyeq$ sıralama bağıntısı verilsin. Ve $n \in A$ olsun. A'nın $x \preccurlyeq n$ olacak şekilde n'den farklı hiçbir elemanı yoksa, n'ye A'nın bir küçükçe elemanı denir. Yani $x \preccurlyeq n \Leftrightarrow x = n$ ise.

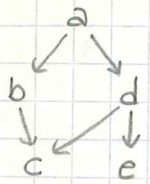
Tanım : Bir A kümesi ve bu kümede bir sıralama bağıntısı verilsin.

$x, y \in A$ için $x \lesssim y$ ise

i- x, y'den küçük veya eşittir.

ii- y, x'ten büyük veya eşittir.

Örnek // $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin sıralama bağıntısı şekildeki gibidir.



$x \in A$ için

$x \lesssim a \Rightarrow x = a$ (a: küçükçe elemandır.)

$c \lesssim x \Rightarrow c = x$

$e \lesssim x \Rightarrow e = x$

c, e : büyükçe elemanlardır.

Tanım : (En Büyük Eleman) :

Bir A kümesi ve bu kümede bir sıralama bağıntısı verilsin. A kümesinin tüm elemanlarından büyük olan bir b elemanı varsa, b'ye A'nın en büyük elemanı denir.

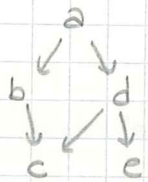
Tanım : (En Küçük Eleman) :

Bir A kümesi ve bu kümede bir sıralama bağıntısı verilsin. A kümesinin tüm elemanlarından küçük olan bir b elemanı varsa, b'ye A'nın en küçük elemanı denir.

Örnek // $A = \{a, b, c, d, e\}$

$a \lesssim b$
$a \lesssim c$
$a \lesssim d$
$a \lesssim e$
$a \lesssim a$

$a \lesssim c$
$b \lesssim c$
$d \lesssim c$
$e \lesssim c$ yanlış



a : en ~~büyük~~ küçük eleman.

e, c : büyükçedir. (en büyük değildir.)

Tanım : (Üst Sınır - Alt Sınır) :

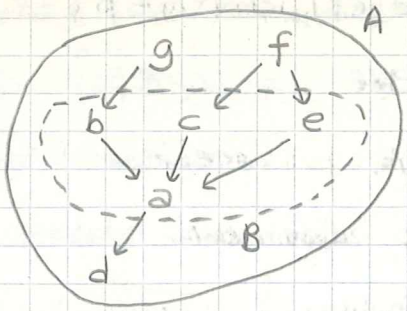
Bir A kümesinde tanımlı bir sıralama bağıntısı verilsin. ve $B \subseteq A$ olsun.

1- $\forall x \in B$ için $x \lesssim a$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa, bu a elemanına B'nin bir üst sınırı denir.

2- $\forall x \in B$ için $b \lesssim x$ olacak şekilde bir $b \in A$ varsa, bu b elemanına B'nin bir alt sınırı denir.

Örnek // $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$B=\{a,b,c,e\}$



B nin alt ve üst sınırları var mıdır?

$$\left.\begin{array}{l} a \precsim a \\ b \precsim a \\ c \precsim a \\ e \precsim a \end{array}\right\} \Rightarrow a,\ B \text{ nin bir üst sınırıdır.}$$

$a \precsim d,\ d \precsim d,\ c \precsim d,\ e \precsim d \Rightarrow d,\ B$ nin bir üst sınırıdır.

$a \in B,\ d \notin B$ B kümesinin bu bağıntıya göre bir alt sınırı yoktur.

$izd_1 \beta = \{x : x \in A$ ve $\exists y \in B$ için $(x,y) \in \beta\}$ β'nın A'ya izdüşümü (I. izdüşümü)

$izd_2 \beta = \{y : y \in B$ ve $\exists x \in A$ için $(x,y) \in \beta\}$ β'nın B'ye " (II. ")

Örnek// $A = \{1,2\}$ $B = \{a,b,c\}$ kümesinde $\beta = \{(1,b),(2,b),(1,c)\}$ dir.

β nın A ya ve B ye izdüşümlerini bulalım.

$izd_1 \beta = \{1,2\} = A$

$izd_2 \beta = \{b,c\} \subset B$

Problemler :

1- $A = \{a,b,c\}$ kümesinin $P(A)$ kuvvet kümesinde tanımlı "$\subseteq$" bağıntısının $P(A)$ kuvvet kümesinde bir sıralama bağıntısı olduğunu gösterin ve Şizelgesini bulun?

2- $S = \{1,2,3 \ldots\}$ kümesinde bir $\preccurlyeq$ bağıntısı $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x|y$ olarak tanımlanıyor.

a) Bu bağıntının sıralama bağıntısı olduğunu ispat edin.

b) S kümesi bu bağıntıya göre nasıl sıralıdır?

c) S'nin $\{24,12,6\}$, $\{3,5,15\}$, $\{15,30,5\}$ kümeleri bu bağıntıya göre tam sıralı mıdır?

3- $A = \{2,3,5,10,30,60\}$ kümesi ve bu kümede $\beta = \{(x,y) : x,y \in A \wedge x|y\}$ bağıntısı veriliyor.

a) β nın bir sıralama bağıntısı olduğunu gösterin.

b) Şizelgesini bulun.

c) Sıralama bağıntısıyla ilgili kavramları belirtin.

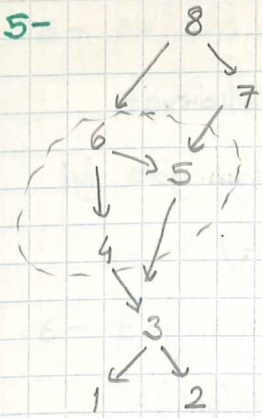
4- $A = \{2,3,4,5,6,8,9,10\}$ kümesinde $x \beta y \Leftrightarrow x$, y'nin bir katıdır. $(x = ky \quad k \in Z^+)$ bağıntısı veriliyor.

a) Sıralama bağıntısı olduğunu gösterin.

b) Şizelgesini bulun.

c) A'nın büyükçe ve küçükçe elemanlarını belirtin.

d) A'nın en büyük ve en küçük elemanları var mıdır? Neden?

5- 

$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ kümesinde, yandaki şema ile bir sıralama bağıntısı veriliyor. Ve $B=\{4,5,6\} \subseteq A$ olduğuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) B nin üst sınırlarının kümesini,

b) B nin alt " " bulunuz.

c) ekü$s(B)$ ve ebas(B) elemanlarını bulunuz.

6- Z^+ kümesinde $\beta=\{(m,n): m,n \in Z^+ \wedge m/n\}$ bağıntısı tanımlanıyor.

a- β'nın bir sıralama bağıntısı olduğunu ispat edin.

b- $A=\{m,n\}$ kümesinin bu bağıntıya göre alt sınırlarının kümesini bulun.

c- A'nın bu bağıntıya göre üst sınırlarının kümesini bulun.

d- ebas(A) ve ekü$s(A)$ elemanlarını bulun.

7- $\mathbb{R}$ kümesinde $\leqslant$ sıralama bağıntısı veriliyor. Buna göre $A=\{\frac{1}{n} : n \in Z^+\}$ kümesinin,

a) Alt sınırlarını,

b) Üst sınırlarını,

c) ebas(A) ve ekü$s(A)$ elemanlarını bulun.

Çözümler.

1- $A=\{a,b,c\} \Rightarrow P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A,\{c\}\}$

$\subseteq = \{(X,y): X,y \in P(A) \wedge X \subseteq y\}$

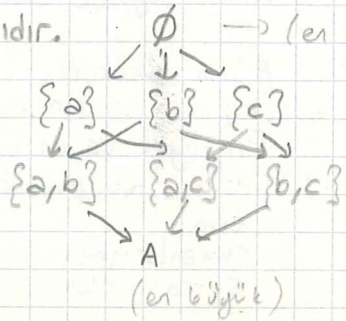
i- $\forall X \in P(A),\ X=X \Rightarrow X \subseteq X \Rightarrow (X,X) \in \subseteq$ yansıma özelliği vardır.

ii- $\forall X,y \in P(A),\ X \neq y \wedge (X,y) \in \subseteq \Rightarrow X \neq y \wedge X \subseteq y \Rightarrow y \nsubseteq X \Rightarrow (y,X) \notin \subseteq$ simetrik.

iii- $\forall X,y,z \in P(A), (X,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta \Rightarrow (X \subseteq y \wedge y \subseteq z)$

$\Rightarrow X \subseteq z \Rightarrow (X,z) \in \subseteq$ geçişlidir.

$\subseteq$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.



2- $x,y \in S$, $x \lesssim y \iff x/y$

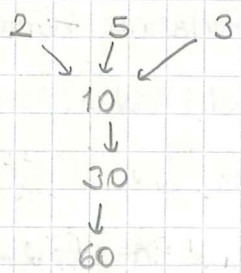
b- $2,3 \in S$ $\quad 2 \not\lesssim 3 \wedge 3 \not\lesssim 2$ tam sıralı değil, parçalı sıralıdır.

c- $3 \lesssim 5 \iff 3/5$ yanlıştır. Sayma sayıları kümesi bu bağıntıya göre iyi sıralı değildir. (Boş olmayan her alt kümesinin elemanı yoktur.)

S'de $\leqslant$ iyi sıralıdır, tam sıralıdır.

Z'de $\leqslant$ tam sıralıdır. (karşılaştırılabilir elemanları olmadığı için) iyi sıralı değildir.

3-b- $A=\{2,3,5,10,30,60\}$ $\quad (x,y)\in\beta \iff x/y$



A'nın küçükçe elemanları : 2,3,5

$x \lesssim a \Rightarrow x=a$, $x\in A$

büyükçe elemanlar : 60

en büyük elemanı yoktur.

Üst sınırı 60 , alt sınırı yoktur. Üstten sınırlıdır. Alttan sınırlı değildir.

4- $A=\{2,3,4,5,6,8,9,10\}$ $\quad (x,y)\in\beta \Rightarrow x$, y'nin bir katıdır. $(x=ky \quad k\in Z^+)$

- $\forall x\in A$, $x=1.x \Rightarrow (x,x)\in\beta$ yansıma vardır.
- $\forall x,y\in A$, $(x,y)\in\beta \Rightarrow x=ky \wedge x\neq y$

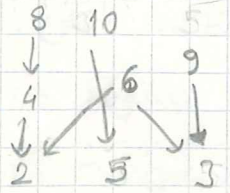
  $\Rightarrow y\neq r.x \Rightarrow (y,x)\notin\beta$ ters sim. var.
- $\forall x,y,z\in A$, $(x,y)\in\beta \wedge (y,z)\in\beta \Rightarrow (x=ky \wedge y=rz)$

  $\Rightarrow x=krz$

  $\Rightarrow x$ z'nin bir katıdır. $(x,z)\in\beta$ geçişlidir.

β bir sıralama bağıntısıdır.

$\beta=\{(x,y) : x=ky\}=\{(2,2),(4,2),(6,2),(8,2),(10,2),(3,3),(6,3),(9,3)\ldots\}$



A'nın büyükçe elemanları 2,3,5 tir.

A'nın küçükçe " 6,8,9,10 dur.

En büyük ve en küçük elemanı yoktur.

tüm elemanlardan sonra gelen

5- $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

A'nın küçükçe elemanı : 8 B'nin üst sınırları, 1,2,3

" büyükce elemanı : 1,2 " alt " ; 6,8.

ekü$s(B)=3$ ebas$(B)=6$

6- $B=\{(m,n) : m,n \in Z^+ \wedge m/n\}$

$A=\{m,n\}$ m/n $\Rightarrow m \leq n$ A'nın alt sınırları: m'den küçük ve m'yi bölen veya m'ye eşit olan tüm Z^+ kümesi.

ebas$(A)=m$

A'nın üst sınırları : m'den büyük ve n tarafından bölünen tüm Z^+ kümesi.

ekü$s(A)=n$

7- IR'de $\leq$ sıralama bağıntısı veriliyor. $A=\{\frac{1}{n} : n \in Z^+\} \in R$ parçalı sıralıdır. iyi sıralı değildir.

A'nın alt sınırları : Sıfırdan küçük veya sıfıra eşit olan tüm reel sayılar.

$A=\{x : 0 < x \leq 1, x \in Q\}$ $x \leq 0 \wedge x \in IR$

ebas$(A)=0 \notin A$

A'nın üst sınırları : 1'den büyük veya eşit olan tüm reel sayılar.

ekü$s(A)=1 \in A$ $x \geq 1 \wedge x \in IR$

A kümesi sınırlı bir kümedir.

- FONKSİYON -

Tanım: Boş olmayan A ve B kümeleri ve A'dan B'ye bir f bağıntısı verilsin.

f bağıntısı $\forall x \in A$ elemanını B nin "bir ve birtek" y elemanına eşliyorsa f bağıntısı A'dan B ye bir fonksiyondur, denir.

Şu iki şeye dikkat edilmelidir.

1- $\forall x \in A$ için bir y elemanı yfx olacak şekilde mutlaka bulunmalıdır.

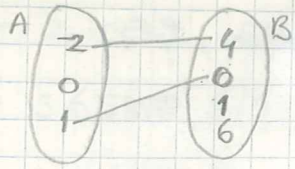
2- $x \in A$ ya karşılık gelen, B nin y elemanı "bir ve birtek" olmalıdır.

A: fonksiyonun tanım kümesi,

B: " değer(değerler) kümesidir.

Örnek // $A=\{-2,0,1\}$ $B=\{4,0,1,6\}$

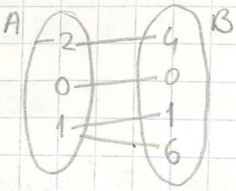
a)



$f=\{(-2,4),(1,0)\}$

"0 ın değer kümesinde elemanı olmadığı için bu bağıntı fonksiyon değildir.

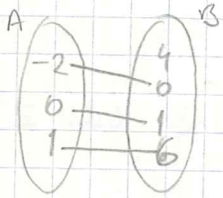
b)



$f=\{(-2,4),(0,0),(1,1),(1,6)\}$

fonksiyon değildir.

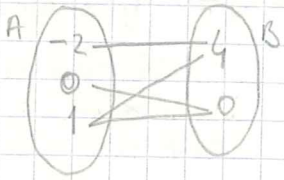
c)



$f=\{(-2,0),(0,1),(1,0)\}$

fonksiyondur.

d) $A=\{-2,0,1\}$ $B=\{4,0\}$



$f=\{(-2,4),(0,0),(1,0),(1,4)$

fonksiyon değildir.

1. Tanım: A'dan B'ye bir f fonksiyonu $f: A \longrightarrow B$ veya $A \xrightarrow{f} B$ gibi sembollerle gösterilir.

2. Tanım: Eğer $(x,y) \in f$ ise y elemanına "x'in f'deki görüntüsü" (x'in f altındaki görüntüsü - x'in f'deki resmi) denir. ve

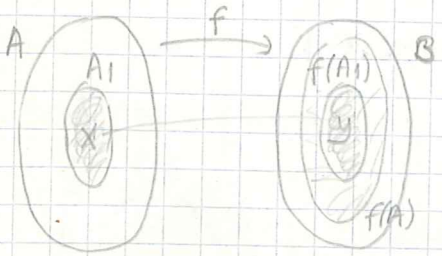
$y=f(x)$ yazılır. Bu ifadeye fonksiyonun kuralı denir.

Tanım: $f: A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $A_1 \subseteq A$ olsun.

$$f(A_1)=\{y : \exists x \in A_1 \text{ ve } y=f(x)\}$$

kümesine, A_1 kümesinin f'deki görüntüsü (resmi) denir. $f(A_1) \subseteq B$

Eğer $A=A_1$ alınırsa $f(A) \subseteq B$



Örnek // $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b,c,d\}$

$f=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

$A_1=\{2,3\}\subset A$ $f(A_1)=\{b,c\}$

$f(A)=\{a,b,c\}\subset B$

Örnek // $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

$A_1=[0,1]$, $f(A_1)=\{0,1\}\subset\mathbb{R}$

$f([-1,1])=[0,1]$ $f(\mathbb{R})=[0,\infty)=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

Tanım : $f:A\to B$ fonksiyonu verilsin ve $A_1\subseteq A$ olsun.

$g:A_1\longrightarrow B$, $g(x)=f(x)$, $\forall x\in A_1$ olan g fonksiyonuna f'nin A_1 kümesine kısıtlanmışı (daraltılmışı) denir.

Sembolik olarak $f/A_1=g$ ile gösterilir.

Tanım : $f:A\longrightarrow B$ verilsin. ve $A\subseteq A_1$ olsun.

$g:A_1\longrightarrow B$, $\forall x\in A$ için $g(x)=f(x)$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonuna f nin A_1 kümesine genişletilmişi denir.

Örnek // $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$

$x\longrightarrow f(x)=\cos x$ $z\longrightarrow f(z)=\cos z$ $x\longrightarrow f(x)=\cos x$

$z=x+iy$

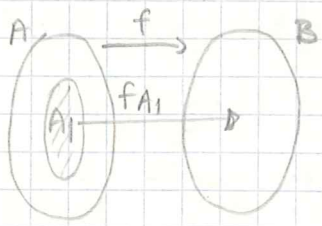
Örnek // $f:\mathbb{Z}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{Q}$

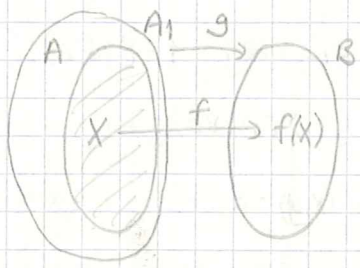
$x\longrightarrow f(x)=\frac{1}{x}$

$g:\mathbb{Q}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{Q}$

$x\longrightarrow g(x)$ $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \text{ ise}\\ 0 & x\notin\mathbb{Z} \text{ ise}\end{cases}$

f, g'nin $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ kümesine kısıtlanmışıdır.





Ters Görüntü :

$f: A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun ve $y \in B$ verilsin. $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in A$ elemanı varsa bu x elemanına y'nin ters görüntüsü denir.

y'nin ters görüntüleri kümesi $f^{-1}\{y\}$ ile gösterilir.

$$f^{-1}\{y\} = \{x : x \in A \text{ ve } y = f(x)\} \subseteq A$$

Örnek // $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$f = \{(a,4), (b,6), (c,1), (d,4)\}$

$f^{-1}\{1\} = \{c\}$ $f^{-1}\{2\} = \{\ \}$ $f^{-1}\{3\} = \emptyset = \{\ \}$ $f^{-1}\{4\} = \{a, d\}$

$f^{-1}\{5\} = \emptyset$ $f^{-1}\{6\} = \{b\}$

Tanım : $f: A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $B_1 \subseteq B$ olsun.

$f^{-1}(B_1) = \{x : x \in A \text{ ve } f(x) \in B_1\}$ kümesine B_1 kümesinin ters görüntüsü denir.

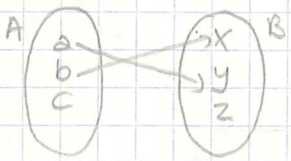
Örnek // $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

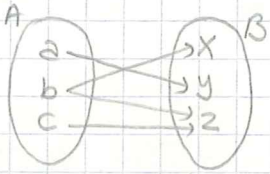
$f = \{(a,4), (b,6), (c,1), (d,6)\}$

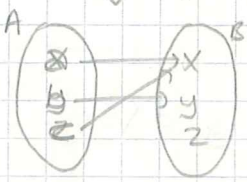
$B_1 = \{1, 2, 4\}$ ise $f^{-1}(B_1) = \{c, a, d\}$

Problemler :

1- $A = \{a, b, c\}$ $B = \{x, y, z\}$ ise aşağıdakilerden hangileri A dan B ye fonksiyondur.

a)


b)


c)


2 - Aşağıdakilerden hangileri A'dan B'ye fonksiyondur.

a) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ $f = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$ fonksiyondur.

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{a, b, c, d\}$ $f = \{(3,a), (4,b), (1,d)\}$ fonksiyondur.

c) $A = [1, 3]$ $B = \{y : x \in A \text{ ve } y = x\}$ $f = \{(x, x^2) : x \in A\}$ fonksiyondur.

d) $A = B = \mathbb{R}$, $f = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y = 2x^2 + 1\}$ fonksiyondur.

e) $A = B = \mathbb{R}$, $f = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y^2 = x\}$ fonksiyon değildir.

f) $A = B = \mathbb{R}$, $f = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 4\}$ fonksiyon değildir.

Fonksiyon Çeşitleri ve Özellikleri :

Eşit Fonksiyonlar : A ve B iki küme, $f: A \longrightarrow B$ ve $g: A \longrightarrow B$ iki fonksiyon olsunlar. $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ ise f ve g fonksiyonları eşittir denir ve $f = g$ yazılır.

Örnek // $\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \\ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(y) = y^2 \end{array}\right\}$ $f = g$ dir. (kuralı aynıdır.)

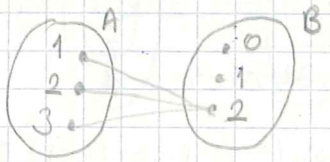
Özdeşlik Fonksiyonu : $f: A \longrightarrow A$ fonksiyonu $\forall x \in A$ için $f(x) = x$ şeklinde tanımlanırsa bu fonksiyona A'nın özdeşlik fonksiyonu denir ve I_A ile gösterilir.

Örnek // $A = \{1,2,3\}$ kümesinin özdeşlik fonksiyonu,

$$f = \{(x,y) : x \in A \wedge y = f(x)\} = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

Sabit Fonksiyon : $f: A \longrightarrow B$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \in A$ için $f(x) = b$ (b=sabit) ise f'ye sabit fonksiyon denir.

Örnek // $A = \{1,2,3\}$ $B = \{0,1,2\}$



$f: A \longrightarrow B$, $f(x) = 2$

$f = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$

Birebir Fonksiyon : A ve B iki küme ve $f: A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. A'nın farklı elemanlarının görüntüleri de farklı ise f'ye birebir fonksiyon denir. bire-bir $\equiv$ 1:1

Bu tanıma göre ;

a) f 1:1 dir $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$

b) f 1:1 dir $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

Örnek // $A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b,c,d\}$ $f = \{(1,b), (2,a), (3,d)\}$

$f: A \longrightarrow B$ 1:1 dir.

Örnek // $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -3x$ fonksiyonu birebir midir?

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -3x_1 = -3x_2$ (fonksiyon tanımından)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (-3 ile bölerek)

f, 1:1 dir.

Örten (Üzerine) Fonksiyon : $f: A \to B$ fonksiyonu verilsin. B nin herbir elemanının A da bir karşılığı varsa (ters görüntü varsa) f fonksiyonu örten (üzerine) dir denir.

Buna göre : f örtendir $\Leftrightarrow \forall y \in B,\ \exists x \in A\ \ f(x)=y$

Örnek // 1) $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{a,b,c\}$ $f=\{(1,b),(2,a),(3,c),(4,d)\}$

f, örtendir, birebir değildir.

2) $f(x)=7x$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=y$ olan $x \in A$ var mıdır?

$7x=y$ $x=\frac{y}{7} \in \mathbb{R}$

$f(x)=f\left(\frac{y}{7}\right)=7.\frac{y}{7}=y$ f örtendir.

Tanım : A ve B kümeleri verildiğinde 1:1 ve örten olacak şekilde $f: A \to B$ fonksiyonu varsa A ve B kümeleri eşit güçlüdürler denir.

Kümeler ailesinde eşit güçlü olma bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterin, yansıma özelliğine sahip olduğunu gösterin.

Tanım : (Permütasyon) :

A bir küme olsun. Bir $f: A \to A$ fonksiyonu bire-bir ve örten ise f'ye A'nın bir permütasyonu denir.

Problemler

1 - Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri bire-birdir?

a) $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ $-\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}=f(\frac{1}{2})$ bire-bir değildir.

b) $f:[1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ $\forall (x_1,x_2) \in [1,3]$, $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2=x_2^2$ birebirdir.

c) $f:[-3,-1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ $\forall x_1,x_2 \in [-3,-1]$ $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2=x_2^2$, $x_1=x_2$ birebirdir.

2 - Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri örtendir?

a) $f:[-1,1] \to [-1,1]$, $f(x)=x^2$ $\forall y \in B$, $f(x)=y$ $x \in A$, $y=-1/2 = f(x) \Rightarrow -\frac{1}{2}=x^2$ örten değil

b) $f:[-1,1] \to [0,1]$, $f(x)=x^2$ $\forall y \in [0,1] \Rightarrow f(x)=y \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{y}$ örtendir.

c) $f:[-1,1] \to [-1,1]$, $f(x)=x^5$ $\forall y \in [-1,1] \Rightarrow f(x)=y \Rightarrow y=x^5 \Rightarrow x=\mp\sqrt[5]{y} \in [-1,1]$ örtendir

d) $f:[0,1] \to [0,1]$, $f(x)=x^5$ $\forall y \in [0,1] \Rightarrow$ örtendir. bire-birdir.

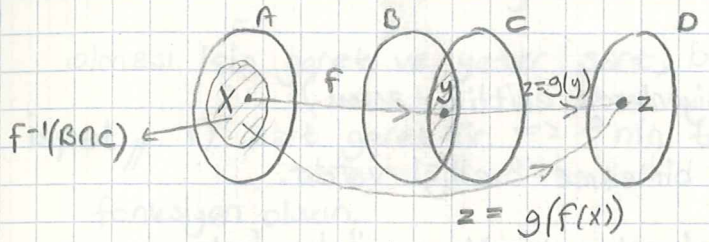
- Fonksiyonların Bileşkesi -

Tanım: $B \cap C \neq \emptyset$ olmak üzere $f: A \to B$ ve $g: C \to D$ fonksiyonları verilsin. f ve g bağıntılarının bileşkesine, f ve g fonksiyonlarının bileşkesi denir. Ve, $g \circ f$ şeklinde yazılır. Yani,

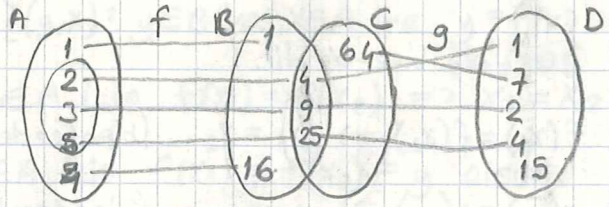
$$g \circ f = \{(x,z) : \exists y \in B \cap C \text{ için } (x,y) \in f \text{ ve } (y,z) \in g\}$$

$$g \circ f = \{(x,z) : \forall x \in f^{-1}(B \cap C) \text{ için } z = (g \circ f)(x)\}$$

$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Örnek // $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{1,16,4,9,25\}$ $C = \{4,9,25,64\}$ $D = \{1,7,2,4,15\}$



$f = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$

$g = \{(4,1),(9,2),(25,4),(64,7)\}$

$g \circ f = \{(2,1),(3,2),(5,4)\}$

Teorem: $B \cap C \neq 0$ olmak üzere $f: A \to B$ ve $g: C \to D$ fonksiyonları verilsin. f ve g nin bileşkesi tanım kümesi $f^{-1}(B \cap C)$ ve değer kümesi D olan bir fonksiyondur.

İspat // $g \circ f = \{(x,z) : \forall x \in f^{-1}(B \cap C) \text{ için } z = g(f(x))\}$

① $\forall x \in f^{-1}(B \cap C)$ için $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ vardır. (Her elemanın görüntüsü vardır.)

② $\forall x_1, x_2 \in f^{-1}(B \cap C)$ için $x_1 \neq x_2$ olsun. $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (f fonksiyon olduğu için)

$\Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ (g fonksiyondur.) $\Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2)$

$\Rightarrow g \circ f$ fonksiyondur.

Özel Hâl: $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ bir fonksiyon olsun.

$g \circ f: A \to C$ bir fonksiyondur.

Tanım: $f: A \longrightarrow B$ $g: C \longrightarrow D$ $h: E \longrightarrow F$ fonksiyonlar ve $B \cap C \neq \phi$, $D \cap E \neq \phi$ iseler,

$$h o (g o f) = (h o g) o f \qquad \text{(bileşke işleminin birleşme özelliği)}$$

İspat // $h o (g o f)$ ve $(h o g) o f$ tanım kümesi $f^{-1}(B \cap C)$, ve değer kümesi de D olan bir fonksiyondur.

$\forall x \in f^{-1}(B \cap C)$ için $[h o (g o f)]_{(x)} = h[(g o f)(x)] = h[g(f(x))]$ .... ①

$[(h o g) o f]_{(x)} = [(h o g)(f(x))] = h[g(f(x))]$ ..... ②

$\Rightarrow [h o (g o f)]_{(x)} = [(h o g) o f]_{(x)}$

$\Rightarrow h o (g o f) = (h o g) o f$ (fonksiyonlarda eşitlik tanımı)

Sonuç: Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.

Teorem: $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ fonksiyonları birebir ve örten iseler $g o f: A \to C$ fonksiyonu da birebir ve örtendir.

İspat I) f ve g bire-bir iseler $g o f$ da bire-birdir.

f: 1:1 dir. $\forall x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (hipotezden)

g: 1:1 dir. $\forall y_1, y_2 \in B$ için $g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ (hipotezden)

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $(g o f)_{(x_1)} = (g o f)_{(x_2)} \Rightarrow x_1 = x_2$?

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $(g o f)_{(x_1)} = (g o f)_{(x_2)} \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (g birebirdir.)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (f birebirdir.)

$\Rightarrow (g o f)$ birebirdir.

II) f ve g örten ise $g o f$ de örtendir.

f: örtendir $\Rightarrow \forall y \in B$ için $f(x) = y$ olan bir $x \in A$ vardır.

g örtendir $\Rightarrow \forall v \in C$ için $g(u) = v$ olan bir $u \in B$ vardır.

$\forall z \in C$ için $(f o g)_{(x)} = z$ olan $x \in A$ vardır. ?

$\forall z \in C$ için $g(y) = z$ olan $y \in B$ vardır. (g örten olduğu için)

$\Rightarrow z = g(f(x))$ olan $x \in A$ vardır. (f örten " ")

$\Rightarrow \forall z \in C$, $z = (g o f)_{(x)}$ olan $x \in A$ vardır.

$\Rightarrow g o f$ örtendir.

Tanım: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. f bağıntısının tersi de bir fonksiyon ise bu fonksiyona f'nin ters fonksiyonu denir. Ve f^{-1} ile gösterilir.

Örnek // $A=\{a,b,c\}$ $B=\{1,2,3\}$, $f=\{(a,2),(b,2),(c,3)\}$

$f^{-1}=\{(2,a),(2,b),(3,c)\}$ fonksiyon değildir.

Sonuç: $f: A \to B$, $f^{-1}: B \to A$

Teorem: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. f nin tersinin de bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart, birebir ve örten olmasıdır.

İspat // 1) şart gerektir. $\Rightarrow$ f nin tersi de $f^{-1}: B \to A$ bir fonksiyon olsun.

$f=\{(x,y): x\in A$ ve $y\in B$ ve $y=f(x)\}$

$f^{-1}=\{(y,x): y\in B$ ve $x\in A$ ve $\underbrace{y=f(x)}_{(x,y)\in f}\}$

$\forall x_1,x_2\in A$ için $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

$\forall x_1,x_2\in A$ için $f(x_1)=f(x_2)=y$ olsun.

$\Rightarrow [(x_1,y)\in f \wedge (x_2,y)\in f]$

$\Rightarrow [(y,x_1)\in f^{-1} \wedge (y,x_2)\in f^{-1}]$ ters bağıntı tanımı.

$\Rightarrow x_1=x_2$ f nin tersi f^{-1} de fonksiyondur.

$\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ fonksiyondur. Bire-birdir.

$f^{-1}: B \to A$ örtendir.?

$\forall x\in A$ için $f^{-1}(y)=x$ olan $y\in B$ vardır.

$\forall y\in B$ için $\exists x\in A, (y,x)\in f^{-1}$

$\Rightarrow (x,y)\in f$ (ters fonksiyon tanımı) $\Rightarrow f$ örtendir.

2) şart yeter $\Rightarrow$ $f: A \to B$ 1:1 ve örten ise $f^{-1}: B \to A$ bir fonksiyondur.

f örten olduğundan, $\forall y\in B$, $y=f(x)$

$\Rightarrow (x,y)\in f \Rightarrow (y,x)\in f^{-1}$

$\Rightarrow x=f^{-1}(y)$

Tekliği ispatı: (Bir ve birtek) Aksini farzedelim, yani

$y \in B$ için $(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$

$\Rightarrow [(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f]$ (ters fonksiyon tanımından)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (f birebir olduğu için)

Örnek // $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x+1$ fonksiyonunun tersinin de bir fonksiyon olduğunu gösterin ve tersini bulun.

I) f birebirdir, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ f birebirdir.

II) f örtendir, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x) = y \Rightarrow y = 2x+1$

$\Rightarrow x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = y$

$\Rightarrow f$ örtendir.

III) $f^{-1} = \{(y, x) : x, y \in \mathbb{R} \wedge y = f(x)\}$

$= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \wedge x = f(y)\}$

$y = \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow y = 2x+1$

($y = e^x$ $\Rightarrow$ $x = e^y$ $\Rightarrow$ $y = \ln x$)

(fonksiyon f $\Rightarrow$ ters fonk. $\Rightarrow f^{-1}$)

Teorem: $f: A \to B$ birebir ve örten ise $f^{-1}: B \to A$ birebir ve örtendir. (Ödev)

Teorem: $f: A \to B$ bir fonksiyon, A nın özdeşlik fonksiyonu I_A ve B nin özdeşlik fonksiyonu I_B olsun.

$$f \circ I_A = I_B \circ f = f$$

İspat // $I_A: A \to A$ $\quad$ $f: A \to B$ $\quad$ $I_B: B \to B$

$x \to I_A(x) = x$ $\quad$ $x \to y = f(x)$ $\quad$ $y \to I_B(y) = y$

$f \circ I_A: A \to B$

$I_B \circ f: A \to B$

$f: A \to B$

$\forall x \in A$ için $(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x))$

$= f(x)$

$\forall x \in A$ için $(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x))$

$= f(x)$

$\Rightarrow \forall x \in A$ için $(f \circ I_A)(x) = f(x) = (I_B \circ f)(x)$

$\Rightarrow (f \circ I_A)(x) = (I_B \circ f)(x)$

$\Rightarrow f \circ I_A = I_B \circ f$

Teorem : $f : A \to B$ birebir ve örten ise,

$f^{-1} \circ f = I_A$ dır ve $f \circ f^{-1} = I_B$ dir.

$f^{-1} : B \to A$ birebir ve örten bir fonksiyondur.

$I_A : A \to A \qquad f^{-1} \circ f : A \to A$

$I_B : B \to B \qquad f \circ f^{-1} : B \to B$

$\forall x \in A$ için $\exists y \in B$, $y = f(x)$

$\forall x \in A$ ve $\exists y \in B$ için $x = f^{-1}(y)$

$\forall x \in A$ için $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$

$= f^{-1}(y) = x = I_A(x)$

$\Rightarrow \forall x \in A$, $(f^{-1} \circ f)(x) = I_A(x)$

$\Rightarrow (f^{-1} \circ f) = I_A$

$\forall y \in B$ için $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = I_B(y)$

$\Rightarrow \forall y \in B$, $(f \circ f^{-1})(y) = I_B(y)$

$\Rightarrow f \circ f^{-1} = I_B$

Teorem : $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ iki fonksiyon olsunlar.

$g \circ f = I_A$ ve $f \circ g = I_B$ ise

f ve g nin her ikisi de birebir ve örtendir. Ayrıca

$f^{-1} = g$ ve $g^{-1} = f$ dir.

İspat // 1) f, bire-birdir. ?

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2$

$\Rightarrow I_A(x_1) = I_A(x_2)$ (hipotezden)

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ bire-birdir

(Ödev) : g : bire-birdir.

2) f örtendir ?

$\forall y \in B$ için $g(y) = x$ olan bir $x \in A$ vardır.

$\Rightarrow \forall y \in B$ için $y = I_B(y)$ ve $(f \circ g) = I_B$

$\Rightarrow (f \circ g)(y) = I_B(y) = y$

$\Rightarrow f(g(y)) = y$

$\Rightarrow f(x) = y$ ($g(y)$ yerine x yazılarak) $x \in A$ vardır ve f örtendir.

Ödev : g örtendir ?

$$g \circ f = I_A \Rightarrow (g \circ f) \circ f^{-1} = I_A \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) = I_A \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow g \circ I_B = I_A \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow g = f^{-1}$$

Ödev : $f = g^{-1}$?

Teorem : $f : A \to B$ birebir ve örten bir fonksiyon ise $(f^{-1})^{-1} = f$ dir.

İspat // $f^{-1} : B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} A$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f \circ f^{-1}"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$$f \circ f^{-1} = I_B$$

$$f^{-1} \circ f = I_A$$

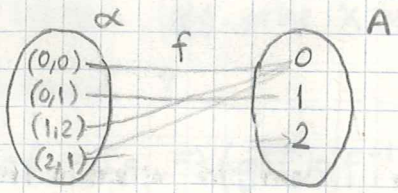
$$(f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = I_B \qquad ((f^{-1})^{-1} \circ f^{-1}) \circ f = I_B \circ f$$

$$\Rightarrow (f^{-1})^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) = f \Rightarrow (f^{-1})^{-1} \circ I_A = f \Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$$

- İŞLEM -

Tanım: A boş olmayan bir küme ve α da $A \times A$ nın boş olmayan bir alt kümesi olsun. α dan A'ya olan bir fonksiyona A da bir ikili işlem veya A'da bir iç işlem (A da bir işlem denir) denir.

Örnek// A kümesi $A = \{0,1,2\}$ $\alpha = \{(0,0),(0,1),(1,2),(2,1)\}$ olsun.



f, A'da bir işlendir.

Tanım: (Çok Değişkenli Fonksiyon):

Boş olmayan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri verilsin.

Tanım kümesi, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ve değer kümesi A olan fonksiyona n değişkenli fonksiyon denir.

Örnek// $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = x^2 - 2xy$ (2 değişkenli fonksiyon)

Örnek// $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = \cos x + yz$ (3 değişkenli fonksiyon)

Örnek// A kümesinin P(A) kuvvet kümesinde,

$f: P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$

$(X,Y) \longrightarrow f(X,Y) = X \cap Y$ Kesişim işleni.

Tanım: $\alpha \subseteq A \times A$ ve $f: \alpha \longrightarrow A$ bir işlem olsun. Eğer $A \times A$ nın bir (a,b) elemanının f altında bir görüntüsü varsa "bu işlem (a,b) de tanımlıdır" denir. Aksi halde f fonksiyonu (a,b) de tanımlı değildir denir. Eğer f işleni (a,b) de tanımlı ise $f(a,b)$ yerine afb yazılır.

Bazen f işleni yerine $+, \oplus, \cdot, \odot$ sembolleri ve afb yerine de $a+b$, $a \oplus b$, $a.b$, $a \odot b$ şeklinde gösterilir. İşlem yerine, $\circ, *, \Delta, \square$ sembolleri, afb yerine de $a \circ b$, $a * b$, $a \Delta b$, $a \square b$ sembolleri kullanılır.

İşlemin Çizelgesi (Tablosu) :

Sonlu bir A kümesinde tanımlanan bir O işleni,

O	A nın tüm elemanları	
	a	b
A nın tüm elemanları: a		c

şeklindedir.

$f(a,b) = c$

Örnek,, $A = \{0,1\}$ $P(A)$ da tanımlanan $\cap$ işleminin çizelgesini düzenlersek,

$P(A) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{1,2\}\}$

$\cap$	ϕ	$\{0\}$	$\{1\}$	A
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{0\}$	ϕ	$\{0\}$	ϕ	$\{0\}$
$\{1\}$	ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{1\}$
A	ϕ	$\{0\}$	$\{1\}$	A

İşlemin Özellikleri :

1. Tanım : (Kapalılık Özelliği) :

Bir A kümesinde tanımlanan bir işlem AXA dan A'ya bir fonksiyon ise A kümesi bu işleme göre kapalıdır. (Bu işlemin kapalılık özelliği vardır.) denir.

$\alpha \subseteq A \times A$ (işlem tanımından)

$\alpha = A \times A$ (kapalılık tanımından)

Örnek,, $A = \{a,b,c\}$ tanımlı O işleni tanımlanıyor.

O	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$f: A \times A \longrightarrow A$ kapalılık özelliği vardır.

$\forall x,y \in A,\ x O y \in A$

*	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	d

kapalılık özelliği yoktur. $d \notin A$

$\forall x,y \in A,\ x * y \notin A$

$x = c\ \ y = c,\ \ c o c = d \notin A$

2. Tanım: (İşlemin Değişme Özelliği):

Bir A kümesinde bir o işlemi tanımlansın. $x o y$ ve $y o x$ tanımlı olmak üzere $\forall x,y \in A$ için $x o y = y o x$ önermesi doğru ise o işleminin değişme (komütatif) özelliği vardır denir.

Örnek// A kümesinin $P(A)$ kuvvet kümesinde tanımlanan $\cap$ ve $\cup$ işlemlerinin değişme özellikleri vardır.

3. Tanım: (İşlemin Birleşme Özelliği):

Bir A kümesinde bir o işlemi tanımlansın. $(x o y) o z$ ve $x o (y o z)$ tanımlı olmak üzere $\forall x,y,z \in A$ için $(x o y) o z = x o (y o z)$ önermesi doğru ise o işleminin birleşme (asosyatif) özelliği vardır denir.

Örnek// Bir A kümesinin $P(A)$ kuvvet kümesinde tanımlı $\cap$ ve birleşim işlemlerinin birleşme özellikleri vardır.

Örnek// $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde $o: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$(x,y) \longrightarrow x o y = x + y - xy$$

o işleminin değişme ve birleşme özelliklerinin olup olmadığını araştıralım.

$\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $x o y = x + y - xy = y + x - yx = y o x$ (değişme öz. vardır.)

$\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$, $(x o y) o z \overset{?}{=} x o (y o z)$

$x o y = x + y - xy \Rightarrow (x o y) o z = (x + y - xy) o z$

$= (x + y - xy) + z - (x + y - xy) z$

$= x + y + z - xy - xz - yz + xyz$

$y o z = y + z - yz \Rightarrow x o (y o z) = x o (y + z - yz)$

$= x + (y + z - yz) - x(y + z - yz)$

$= x + y + z - xy - xz - yz + xyz$

$\forall x,y,z$,

$(x o y) o z = x o (y o z)$ (birleşme öz. vardır.)

4. Tanım: (Birim Eleman Özelliği):

Bir A kümesinde bir o işlemi verilsin. $\forall x \in A$ ve $\exists e \in A$ için $x o e = e o x = x$ önermesi doğru ise e elemanına A nın o işlemine göre birim (etkisiz) elemanı denir.

Örnek// A kümesinin $P(A)$ kuvvet kümesinde tanımlı $\cap$ işlemi veriliyor.

$\forall X \in P(A)$ ve $\exists e \in P(A)$ için $X \circ e = e \circ X = X$

$P(A) = \{\emptyset, A, \dots\}$

$X \cap e = e \cap X = X$

$X \in P(A) \Rightarrow X \subseteq A \Rightarrow X \cap A = X = A \cap X$

A nın $P(A)$ kuvvet kümesinde $\cup$ işlemi,

$\forall X \in P(A)$, $\exists e \in P(A)$ için $X \cup e = e \cup X = X$ $e = \emptyset$

Örnek// Z de $\circ$ işlemi $\forall x, y \in Z$ için $x \circ y = x + y + 2xy$ ise Z nin $\circ$ işlemine göre etkisiz elemanı varsa bulun.

$\forall x \in Z$ ve $\exists e \in Z$, $x \circ e = e \circ x = x$

$x \circ e = x \Rightarrow \cancel{x} + e + 2xe = \cancel{x}$

$\Rightarrow e(1+2x) = 0$ → $e = 0$ olmalıdır. → $1 + 2x = 0$ olmaz.

$x \circ 0 = x + 0 + 2x0$

$e \circ x \overset{?}{=} x$ olmalıdır. $e \circ x = 0 \circ x = 0 + x - 2 \circ x = x$

Teorem: Bir A kümesi, bu kümede tanımlanan bir $\circ$ işlemine göre kapalı olsun. Eğer A kümesinin $\circ$ işlemine göre birim elemanı varsa tektir.

İspat// Aksini kabul edelim. Birim eleman tek olmasın. e_1 ve e_2 gibi iki birim eleman olsun. $\forall x \in A$ için $x \circ e_1 = e_1 \circ x = x$ (e_1 birim eleman)

$\forall x \in A$ için $x \circ e_2 = e_2 \circ x = x$ (e_2 " ")

$\Rightarrow e_1 \circ e_2 = e_2$ (e_1 birim eleman olduğu için.)

$\Rightarrow e_1 \circ e_2 = e_1$ (e_2 " " " " .)

$\Rightarrow e_2 = e_1$

5. Tanım: (Ters Eleman):

A kümesinde tanımlı bir $\circ$ işlemi verilsin. A nın $\circ$ işlemine göre birim elemanı e olsun. $\forall x \in A$ için $x \circ y = y \circ x = e$ önermesi doğru olacak şekilde $\exists y \in A$ varsa bu y elemanına, x'in $\circ$ işlemine göre ters (invers) elemanı denir. Sembol olarak x^{-1} veya $-x$ ile gösterilir.

Teorem: Bir A kümesinde tanımlı bir $\circ$ işlemi veriliyor. $\circ$ işlemine göre birim eleman e olsun. ve bu işlemin birleşme özelliğinin bulunduğu

bilmiyor. Eğer o işlemine göre ters eleman varsa tektir.

İspat// Aksini farzedelim. Yani x'in y_1 ve y_2 gibi iki ters elemanının var olduğunu kabul edelim.

$$x o y_1 = y_1 o x = e \quad (y_1 \text{ ters eleman})$$

$$x o y_2 = y_2 o x = e \quad (y_2 \text{ ters eleman})$$

$$\Rightarrow (y_1 o x) o y_2 = y_1 o (x o y_2) \Rightarrow e o y_2 = y_1 o e \Rightarrow y_2 = y_1$$

Tanım: (Dış İşlem):

A ve S iki küme olsun. S×A dan A ya tanımlanan fonksiyona bir dış işlem denir.

$$f : S \times A \longrightarrow A$$

$$(\alpha, x) \longrightarrow f(\alpha, x) = \alpha o x$$

Örnek//

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$o : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

$$\left(\lambda, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \longrightarrow \lambda o \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$$

Tanım: (Dağılma Özelliği):

Bir A kümesinde o ve Δ işlemleri veriliyor.

a) $x o (y \Delta z)$ ve $(x o y) \Delta (x o z)$ tanımlı olmak üzere $\forall x, y, z \in A$ için $x o (y \Delta z) = (x o y) \Delta (x o z)$ önermesi doğru ise "o işleminin Δ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır" denir.

b) $(x \Delta y) o z$ ve $(x o z) \Delta (y o z)$ tanımlı olmak üzere $\forall x, y, z \in A$ için $(x \Delta y) o z = (x o z) \Delta (y o z)$ önermesi doğru ise "o işleminin Δ işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği vardır" denir.

c) Eğer o işleminin Δ işlemi üzerine hem sağdan hem de soldan dağılma özelliği varsa, "o işleminin Δ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır" denir.

Örnek// A kümesinin P(A) kuvvet kümesinde tanımlı ∩ ve ∪ işlemlerinin birbiri üzerine dağılma özellikleri vardır.

1- Z'de $\forall x,y \in Z$, $x \circ y = x+y-1$, $\circ$ işleminin özelliklerini inceleyin.

2- $x,y \in N$ için $x \circ y = x+y^2$ ve $x \Delta y = x.y^2$ işlemleri tanımlanıyor.

Bu işlemlerin birbiri üzerine dağılma özellikleri var mıdır?

3- $\beta = \{(x,y) : x,y \in Z$ ve $5/x-y\}$ olsun. β bağıntısının Z den ayırdığı denklik sınıflarının kümesi (bölüm kümesi) Z/β da,

$\forall \bar{x},\bar{y} \in Z/\beta$ için $\bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y}$ ve $\bar{x} \odot \bar{y} = \overline{xy}$ olduğuna göre

$\oplus$ ve $\odot$ işlemlerinin çizelgelerini düzenleyip, özelliklerini inceleyin.

4- Z de tanımlı $x \oplus y = 2x+y$ işleminin özelliklerini inceleyin.

5- N'de tanımlı $x * y = x^2+y^2$ işleminin özelliklerini inceleyin.

6- $\forall x,y \in Z$ için $x \circ y = x^2$, $x * y = y^2$ şeklinde tanımlanıyor.

$*$ işleminin $\circ$ işlemi üzerine dağılma özelliği var mıdır?

7- $A = \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere $\forall x,y \in A$ için

$x \oplus y = x+y$ nin 5 ile bölümündeki kalan,

$x \odot y = x.y$ nin 5 " " ", işlemleri veriliyor.

a) $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerinin çizelgelerini düzenleyerek özelliklerini inceleyin.

b) $(4 \odot y) \oplus 3 = 0$ açık önermesinin doğruluk kümesini (Z'de) bulun.

8- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar olsunlar.

$f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow (f+g)(x) = f(x)+g(x)$ olduğuna göre

$(f+g)oh = (foh)+(gof)$ olduğunu ispat edin.

9- A kümesinde tanımlı $\circ$ işlemi veriliyor. $\circ$ işlemine göre kapalılık, birleşme, birim eleman özelliği ve a,b elemanlarının ters elemanlarının a^{-1} ve b^{-1} olduğu bilindiğine göre

a) $(a^{-1})^{-1} = a$ b) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ olduğunu ispatlayın.

Çözümler :

1- a) $\forall x,y \in Z$, $x \circ y = x+y-1 \in Z$ kapalılık öz. vardır.

b) $x \circ y = x+y-1 = y+x-1 = y \circ x$ değişme öz. vardır.

c) $\forall x,y \in Z$, $(x o y) o z = (x+y-1) o z = (x+y-1)+z-1 = x+y+z-2$: değ. ve birl. öz.

$y o z = y+z-1 \Rightarrow x o (y o z) = x o (y+z-1) = x+(y+z-1)-1 = x+y+z-2$

$\Rightarrow \forall x,y,z \in Z$ $(x o y) o z = x o (y o z)$ birleşme öz. vardır.

d) $\forall x \in Z$, $x o e = e o x = x$ $e \in Z$

$x o e = x \Rightarrow \cancel{x}+e-1 = \cancel{x} \Rightarrow e = 1$

$e o x = 1 o x = 1+x-1 = x$ $e = 1 \in Z$

e) $\forall x \in Z$, $x o y = y o x = e$

$\Rightarrow x o y = 1 \Rightarrow x+y-1 = 1 \Rightarrow y = 2-x$

$y o x = (2-x) o x = 2-x+x-1 = 1 = e$ $x^{-1} = 2-x$ ters elemen.

2- $x,y \in W$ $x o (y \Delta z) \overset{?}{=} (x o y) \Delta (x o z)$

$y \Delta z = y z^2 \Rightarrow x o (y \Delta z) = x o (y z^2)$

$x o (y \Delta z) = x + (y z^2)^2 = x + y^2 z^4$ //

$\left.\begin{array}{l} x o y = x+y^2 \\ x o z = x+z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x o y) \Delta (x o z)$

$= (x+y^2) \Delta (x+z^2) = (x+y^2).(x+z^2)^2$

$= (x+y^2)(x^2+2xz^2+z^4)$

$(x o y) \Delta (x o z) = x^3+2x^2z^2+xz^4+x^2y^2+2xy^2z^2+y^2z^4$ //

$x o (y \Delta z) \neq (x o y) \Delta (y o z)$

3- $Z/\beta = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ $\bar{x},\bar{y} \in Z/\beta$ $\bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y}$, $\bar{x} \odot \bar{y} = \overline{xy}$

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$\bar{0} \oplus \bar{0} = \overline{0+0} = \bar{0}$

$\bar{1} \oplus \bar{1} = \overline{1+1} = \bar{2}$

$\forall x \in Z/\beta$, $x \oplus e = e \oplus x = x$

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$e = \bar{1}$ kapalıdır.

Değişme öz. vardır.

$\bar{2}^{-1} = \bar{3}$ $\bar{3}^{-1} = \bar{2}$ $\bar{4}^{-1} = \bar{4}$

$e = \bar{0}$ $-\bar{1} = \bar{4}$ $-\bar{4} = \bar{1}$ $-\bar{2} = \bar{3}$ $-\bar{3} = \bar{2}$

0'ın denklik sınıfı yutan elemandır.

4- $x \oplus y = 2x+y$

1-) $\forall x,y \in Z$, $x \oplus y = 2x+y \in Z$ kapalıdır.

2-) $\left.\begin{array}{l} x o y = 2x+y \\ y o x = 2y+x \end{array}\right\}$ $x o y \neq y o x$ değişme özelliği yok.

3-) $\forall x,y,z \in Z$ $(x o y) o z = x o (y o z)$

$x o y = 2x+y \Rightarrow (x o y) o z = (2x+y) o z = 2(2x+y)+z = 4x+2y+z$

$y o z = 2y+z \Rightarrow x o (y o z) = 2x + (2y+z) = 2x+2y+z$

$\Rightarrow x o (y o z) \neq (x o y) o z$

4-) $\forall x \in Z,\ x o e = e o x = x \Rightarrow x o e = x \Rightarrow 2x + e = x \Rightarrow x + e = 0$

Birim eleman yoktur. Çünkü e sabit değil. O halde ters eleman da yoktur.

6 - $\forall x, y \in Z,\ x o (y * z) \overset{?}{=} (x o y) * (x o z)$

$y * z = z^2 \quad x o (y * z) = x o (z^2) = x^2$

$(x o y) = x^2 \quad (x o y) * (x o z) = (x^2) * (x^2) = (x^2)^2 = x^4$

$(x o z) = x^2$ Dağılma özl. yok.

7 - $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

a)

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

b) $(4 \odot y) \oplus 3 = 0$

$[(4 \odot y) \oplus 3] \oplus [-3] = 0 \oplus (-3)$

$[(4 \odot y) \oplus (3 \oplus 2)] = 0 \oplus 2$

$[(4 \odot y) \oplus 0] = 2 \Rightarrow 4^{-1} \odot (4 \odot y) = 4^{-1} \odot 2$

$\Rightarrow 4 \odot (4 \odot y) = 4 \odot 2 \Rightarrow (4 \odot 4) \odot y = 3$

$\Rightarrow 1 \odot y = 3 \Rightarrow y = 3$ //

8 - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f+g) o h \overset{?}{=} (f o h) + (g o h)$

$[(f+g) o h]_{(x)} = (f+g)(h(x))$

$= f(h(x)) + g(h(x))$

$= (f o h)_{(x)} + (g o h)_{(x)} = [(f o h) + (g o h)]_{(x)} \Rightarrow (f+g) o h = (f o h) + (g o h)$

9 - a) $(a^{-1})^{-1} \overset{?}{=} a \qquad x o y = y o x = e \quad x^{-1} = y \Rightarrow x^{-1} o x = e \Rightarrow x^{-1}$ x'in ters elemanıdır.

$\Rightarrow \forall a \in A$ için $a^{-1} o a = e = a o a^{-1}$ (a nın ters elemanı a^{-1} dir)

$\Rightarrow (a^{-1})^{-1} o a^{-1} = e \Rightarrow ((a^{-1})^{-1} o a^{-1}) o a = e o a \Rightarrow (a^{-1})^{-1} o (a^{-1} o a) = a$

$\Rightarrow (a^{-1})^{-1} o e = a \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$ //

b) $\forall a, b \in A$ için,

$a o b \in A \Rightarrow (a o b)^{-1} o (a o b) = e$

$\Rightarrow [(a o b)^{-1} o (a o b)] o b^{-1} = e o b^{-1}$

$\Rightarrow [(a o b)^{-1} o a] o (b o b^{-1}) = b^{-1}$

$\Rightarrow [(a o b)^{-1} o a] o e = b^{-1} \Rightarrow (a o b)^{-1} o a = b^{-1}$

$\Rightarrow [(a o b)^{-1} o a] o a^{-1} = b^{-1} o a^{-1} \Rightarrow (a o b)^{-1} o (a o a^{-1}) = b^{-1} o a^{-1}$

$\Rightarrow (a o b)^{-1} o e = b^{-1} o a^{-1} \Rightarrow (a o b)^{-1} = b^{-1} o a^{-1}$ //

MATEMATİK YAPI :

Tanım: Bir küme ve bu kümede tanımlı işlem ve bağıntılara birlikte (olarak) bir matematik yapı (matematik sistem) denir.

A kümesinde tanımlanan $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, bağıntıları ve $o, \Delta, \ldots$, işlemleri verilsin. $(A, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, o, \Delta, \ldots)$ şeklinde gösterilir.

Örnek,, 1) A kümesinde bir o işleni tanımlanıyor.

(A, o) matematik yapısı bir işlemli matematik yapıdır.

2) A kümesinde $o, \square$ işlemleri tanımlanıyor

$(A, o, \square)$ matematik yapısı iki işlemli matematik yapıdır.

A kümesinin $P(A)$ kuvvet kümesinde tanımlanan $\cup, \cap, \subseteq$ bağıntıları tanımlıdır.

$(P(A), \cup, \cap, \subseteq)$ üç bağıntılı matematik yapıdır.

Tanım: (Yarı Grup):

Bir G kümesi ve bu kümede tanımlı bir o işleni verilsin. Eğer,

1- $\forall x, y \in G$ için $x o y \in G$ (kapalılık özelliği)

2- $\forall x, y, z \in G$ için $(x o y) o z = x o (y o z)$ (birleşme özelliği)

varsa, (G, o) matematik yapısına yarı grup denir. (G kümesi o işlemine göre yarı gruptur)

Tanım: (Grup):

(G, o) matematik yapısı veriliyor. Eğer,

G_1, 1- G kümesi o işlemine göre kapalıdır. $\forall x, y \in G$, $x o y \in G$

G_2, 2- o işleminin birleşme özelliği vardır. $\forall x, y, z \in G$, $(x o y) o z = x o (y o z)$

G_3, 3- " birim eleman " ". $\forall x \in G$, $x o e = e o x = x$

G_4, 4- o işlemine göre ters eleman özelliği vardır. $\forall x \in G \wedge \exists y \in G$, $x o y = y o x = e$

doğru ise (G, o) matematik yapısı bir gruptur. (G kümesi o işlemine göre bir gruptur.)

Örnek,, Q^+ $\forall x, y \in Q^+$, $x o y = \frac{xy}{3}$

(Q^+, o) bir gruptur.

1- $\forall x,y \in Q^+$, $x o y = \frac{xy}{3} \in Q^+$

2- $\forall x,y,z \in Q^+$, $x o y = \frac{xy}{3} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} (x o y) o z = \frac{xy}{3} o z = \frac{\frac{xy}{3} z}{3} = \frac{xyz}{9} \\ y o z = \frac{yz}{3} \Rightarrow x o (y o z) = \frac{x \frac{yz}{3}}{3} = \frac{xyz}{9} \end{array}\right] (x o y) o z = x o (y o z)$$

3- $\forall x \in Q^+$, $\exists e \in Q^+$, $x o e = e o x = x$

$\Rightarrow x o e = x \Rightarrow \frac{xe}{3} = x \Rightarrow e = 3$

$\Rightarrow e o x = 3 o x = \frac{3x}{3} = x \Rightarrow e = 3$ birim elemandır.

4- $\forall x \in Q^+$, $\exists y \in Q^+$, $x o y = y o x = e$

$\Rightarrow x o y = e \Rightarrow \frac{xy}{3} = 3 \Rightarrow y = \frac{9}{x} = x^{-1}$ ters elemandır.

(Q^+, o) yapısı bir Abel grubudur.

Tanım: (G,o) bir grup olsun. o işleminin değişme özelliği varsa, (G,o) matematik yapısına değişmeli grup (Abel grubu - komütatif grup) denir.

Örnek// (Q^+, o) Abel grubudur.

$\forall x,y \in Q^+$, $x o y = \frac{xy}{3} = \frac{yx}{3} = y o x$ (değişme öz.)

Teorem: (G,o) bir grup olsun.

1- G'nin o işlemine göre bir tek birim elemanı vardır.

2- " her bir elemanının o işlemine göre birtek ters elemanı vardır.

Teorem: Herhangi bir grupta grup işleminin sadeleştirme özelliği vardır.

1- (G,o) grup olsun.

$x,y,z \in G$ için $x o z = y o z \Rightarrow x = y$ (soldan sadeleştirme)

2- $x,y,z \in G$ için $z o x = z o y \Rightarrow x = y$ (sağdan sadeleştirme öz.)

İspat 1// $x,y,z \in G$ için $x o z = y o z$

$\Rightarrow (x o z) o z^{-1} = (y o z) o z^{-1}$

$\Rightarrow x o (z o z^{-1}) = y o (z o z^{-1})$

$\Rightarrow x o e = y o e$

$\Rightarrow x = y$

Teorem: (G,o) bir grup olsun.

$a,b \in G$ olmak üzere $a o x = b$ denkleminin G'de bir ve yalnız birtek çözümü vardır.

İspat // $a o x = b \Rightarrow a^{-1} o (a o x) = a^{-1} o b$

$\Rightarrow (a^{-1} o a) o x = a^{-1} o b$ (birleşme öz.)

$\Rightarrow e o x = a^{-1} o b$ (ters eleman öz.)

$\Rightarrow x = a^{-1} o b$

Teorem: (G,o) bir grup olsun.

1- $\forall a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$

2- $\forall a,b \in G, (a o b)^{-1} = b^{-1} o a^{-1}$

Tanım: (G,o) ve (H,Δ) iki grup ve $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun.

a) $\forall x,y \in G, f(x o y) = f(x) \Delta f(y)$

ise f'ye (G,o) grubundan (H,Δ) grubuna bir grup homomorfizmi denir.

b) f ayrıca birebir ve örten ise grup homomorfizmine grup izomorfizmi denir.

c) $G = H$ ise grup izomorfizmine, grup otomorfizmi denir.

(G,o) ile (H,Δ) arasında bir grup izomorfizmi varsa bu gruplara izomorf gruplar denir. İzomorf gruplardan birinde doğru olan bir önerme diğerinde de doğrudur.

Tanım: (Sonlu Grup - Sonsuz Grup):

(G,o) bir grup olsun. G kümesi sonlu ise gruba sonlu grup, sonsuz ise sonsuz grup denir.

Problemler:

1- $A = \{a\}$ $a o a = a$ ise (A,o) yapısının Abel grubu olduğunu gösterin.

2- (G,o) bir sonlu grup ise o işleminin çizelgesinde herbir sırada G'nin herbir elemanının bir ve yalnız bir kez bulunabileceğini gösterin.

3- (G,o) değişmeli olmayan bir grup olmak üzere,

a) $a,b,c \in G$, $x o a o b = c o b$

b) $a o x o b = b o c$ denklemlerinin G'deki çözümlerini bulun.

4- $A=\{x : x\in\mathbb{R} \wedge |x|<1\}$ olsun. $\forall x,y\in A$ için $x\circ y=\dfrac{x+y}{1+y}$ ise $(A,\circ)$ yapısının bir abel grubu olduğunu gösterin.

5- $(G,\circ)$ ve (H,Δ) iki grup olsun. $\forall (x,y),(u,v)\in G\times H$ için

$(x,y)\,\square\,(u,v)=(x\circ u,\ y\Delta v)$ ise $(G\times H,\square)$ yapısında bir grup olduğunu ispatlayın.

6- $(G,\circ)$ ve (H,Δ) iki grup ve $f:G\longrightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun.

a) G nin $\circ$ işlemine göre birim elemanı e_1 ve

H'nin Δ " " " " e_2 ise

$f(e_1)=e_2$

b) $\forall x\in G$ için $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$ olduğunu ispat edin.

7- $\mathbb{R}^+$, da $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$, $f(x)=e^x$ olsun. f nin $(R,+)$ grubundan $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ grubuna bir grup izomorfizmi olduğunu gösterin.

8- $G=\left\{\dfrac{1+2m}{1+2n} : m,n\in\mathbb{Z}\right\}$ kümesinin Q daki çarpma işlemine göre bir grup olduğunu ispat edin.

Çözümler :

1- $A=\{a\}$ $\quad a\circ a=a$

kapalılık var. $(a\circ a)\circ a=a\circ(a\circ a)=a$ $\qquad a\circ a=a\circ a=a$

birleşme var. birim eleman a dır.

$a^{-1}=?$ $\quad \forall x\in A,\ \exists y\in A \Rightarrow x\circ y=y\circ x=e$

$x=a$ $\quad a\circ y=a$ $\quad y=a^{-1}=a$ $\qquad (G,\circ)$ gruptur.

$a\circ a=a\circ a$ bir abel grubudur.

2-

$\circ$	a	b	e	f
a	b	c		
b		c		
⋮				
d			c	c

Aksini farzedelim. Yani $c\in G$ bir yatay sırada iki kez bulunsun.

$d\circ e=c \wedge d\circ f=c$

$\Rightarrow d\circ e=d\circ f$

$\Rightarrow e=f$ (grup işl. sadel. öz.)

6/ a) $e_1 \circ e_1 = e_1 \Rightarrow f(e_1 \circ e_1) = f(e_1)$

$\Rightarrow f(e_1) \Delta f(e_1) = f(e_1)$

$\Rightarrow [-f(e_1)] \Delta [f(e_1) \Delta f(e_1)] = [-f(e_1)] \Delta f(e_1)$

$\Rightarrow [-f(e_1) \Delta f(e_1)] \Delta f(e_1) = e_2$

$\Rightarrow e_2 \Delta f(e_1) = e_2$

$\Rightarrow f(e_1) = e_2$

b) $\forall x \in G,\ f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

$\forall x \in G,\ x \circ x^{-1} = e_1 \Rightarrow f(x \circ x^{-1}) = f(e_1)$

$\Rightarrow f(x) \Delta f(x^{-1}) = e_2$

$\Rightarrow [f(x)]^{-1} \Delta [f(x) \Delta f(x^{-1})] = [f(x)]^{-1} \Delta e_2$

$\Rightarrow [f(x)]^{-1} \Delta f(x)] \Delta f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

$\Rightarrow e_2 \Delta f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

$\Rightarrow f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

7- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad f(x) = e^x \quad (\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{R}^+, \cdot)$

1- $(\mathbb{R}, +)$ ve $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ bir gruptur. (ödev)

2- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$

3- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow e^x = e^y$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow f:$ 1:1 dir.

4- $\forall y \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$

$\Rightarrow e^x = y \quad x = \ln y \in \mathbb{R}$, f örtendir.

Tanım: (Alt Grup)

$(G, \circ)$ bir grup ve $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$ olsun. Eğer $(H, \circ)$ yapısı da bir grup ise bu gruba $(G, \circ)$ grubunun bir alt grubu denir.

Örnek// $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ grubunun bir alt grubudur.

Ödev// $\{G, \circ\}$ bir grup olsun. e, G'nin $\circ$ işlemine göre bir, birim elemanı olsun. Buna göre $(\{e\}, \circ)$ yapısının bir abel grubu olduğunu ispat edin. $(\{e\}, \circ)$ grubuna $(G, \circ)$ grubunun basit alt grubu denir.

Tanım: Bir grubun basit alt grubundan farklı bir alt grubu varsa, bu alt gruba has (öz) alt grup denir.

Teorem: Bir alt grupta etkisiz (birim) eleman ve ters eleman gruptaki gibidir.

Teorem: (G,o) bir grup ve H kümesi de G'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. (H,o) bir alt gruptur $\Leftrightarrow$

$$(\forall x,y \in H,\ x o y^{-1} \in H)$$

İspat: 1) $\Rightarrow$ (gerek şart): (H,o) bir alt grup $\Rightarrow$ (H,o) yapısı bir gruptur.

$\Rightarrow \forall x,y \in H,\ x o y^{-1} \in H$

2) $\Leftarrow$ (yeter şart): $\forall x,y \in H,\ x o y^{-1} \in H$ olsun.

a) $x=y$ alalım. $x o y^{-1} = x o x^{-1} = e \in H$ (birim eleman öz.)

b) $x=e$ alalım. $e o y^{-1} = y^{-1} \in H$ (ters eleman öz.)

c) birleşme özelliği vardır.

d) $\forall x,y \in H,\ x, y^{-1} \in H$ (ters el. öz)

$\Rightarrow x, (y^{-1})^{-1} \in H$

$\Rightarrow x o (y^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow x o y \in H$ (kapalılık öz)

$\Rightarrow (H,o)$ bir gruptur. (G,o) bir alt gruptur.

Problemler:

1- Her grubun en az bir alt grubu var mıdır?

2- (G,o) grubunun iki alt grubu (H_1,o) ve (H_2,o) olsun. $(H_1 \cap H_2, o)$ yapısının da bir alt grub olduğunu ispat edin

3- (G,o) bir grup, (H,o) bir alt grup olsun. $xHx^{-1} = \{x o h o x^{-1} : x \in G$ ve $h \in H\}$ ise (xHx^{-1}) işlem yapısının da bir alt grup olduğunu ispat edin.

Çözümler:

1- Kendisinden farklı en az bir basit alt grubu vardır.

2- a) $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ (e birim elemanı ortaktır)

b) $\forall x,y \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow (x,y \in H_1) \wedge (x,y \in H_2)$

$\Rightarrow (x o y^{-1} \in H_1) \wedge (x o y^{-1} \in H_2)$ (H_1 bir alt gruptur.)

$\Rightarrow x o y^{-1} \in H_1 \cap H_2$ (kes. tan)

$(H_1 \cap H_2, o)$ bir alt gruptur. (Teoremden)

3 - $\forall a,b \in XHX^{-1} \Rightarrow (a = X o h_1 o X^{-1}, X \in G \wedge h_1 \in H) \wedge (b = X o h_2 o X^{-1}, X \in G, h_2 \in H)$

$$\Rightarrow a o b^{-1} = [X o h_1 o X^{-1}] o [X o h_2 o X^{-1}]^{-1}$$

$$= [X o h_1 o X^{-1}] o [(X^{-1})^{-1} o (X o h_2)^{-1}]$$

$$= [X o h_1 o X^{-1}] o [X o h_2^{-1} o X^{-1}]$$

$$= [(X o h_1) o (X^{-1} o X) o (h_2^{-1} o X^{-1})$$

$$= (X o h_1) o e o (h_2^{-1} o X^{-1})$$

$$= X o (h_1 o h_2^{-1}) o X^{-1}$$

$$a o b^{-1} = X o (h_1 o h_2^{-1}) o X^{-1}, X \in G \wedge h_1 o h_2^{-1} \in H$$

$\Rightarrow a o b^{-1} \in XHX^{-1} \Rightarrow (XHX^{-1}, o)$ normal alt gruptur.

- HALKA -

H boş olmayan bir küme olsun. ve bu kümede toplama ve çarpma diye adlandırılan iki (+) ve (·) işlemleri tanımlansın. Eğer,

H_1) (H,+) bir abel grubudur

H_2) H kümesi (·) işlemine göre kapalıdır.

H_3) H kümesinde (·) işleminin birleşme özelliği vardır.

H_4) (·) işleminin (+) işlemine göre dağılma özelliği vardır.

önermeleri doğru ise (H, +, ·) yapısı bir halkadır denir.

Örnek// (Z, +, ·) tamsayılar halkasıdır.

Tanım: (H, +, ·) bir halka olsun. H kümesinin (+) işlemine göre birim elemanına halkanın sıfırı denir. ve 0 veya e ile gösterilir.

Tanım: Halkanın (+) işlemine göre bir X elemanının ters elemanı −X sembolü ile gösterilir.

Teorem: (H, +, ·) bir halka olsun. Halkanın sıfırı 0 olmak üzere $\forall X \in H$ için $X.0 = 0.X = 0$ dır.

İspat// $0 + 0 = 0 \Rightarrow \forall X \in H, X.(0+0) = X.0$ (her iki tarafı X ile çarparak)

$\Rightarrow X0 + X0 = X0$ ((·)nın (+) üzerine dağ. öz)

$\Rightarrow (-X.0) + (X0 + X0) = (-X.0) + (X.0)$

$\Rightarrow [(-X.0) + X.0] + X.0 = 0 \Rightarrow 0 + X.0 = 0 \Rightarrow X.0 = 0$

Ödev// $0.X=0$ olduğunu gösteriniz.

Teorem: $(H,+,\cdot)$ bir halka olsun.

1- $\forall X\in H,\ -(-X)=X$

2- $\forall X,y\in H,\ -(X+y)=(-X)+(-y)$

3- $\forall X,y\in H,\ X\cdot(-y)=(-X)\cdot y=-(X\cdot y)$

4- $\forall X,y\in H,\ (-X)\cdot(-y)=Xy$

İspat// 1- $\forall X\in H,\ (-X)+X=0$

$\Rightarrow [-(-X)]+(-X)=0$

$\Rightarrow -X+X=0 \wedge (-X)+(-(-X))=0$

$\Rightarrow -(-X)=X$

2- $\forall X,y\in H,\ (-X)+(X)=0 \wedge (-y)+y=0$

$\Rightarrow [(-X)+X]+[(-y)+y]=0+0$

$\Rightarrow (-X)+[X+(-y)]+y=0$

$\Rightarrow [(-X)+(-y)]+(X+y)=0$

$\Rightarrow -(X+y)=(-X)+(-y)$

3- $\forall X,y\in H,\ y+(-y)=0$

$\Rightarrow X\cdot[y+(-y)]=X\cdot 0$

$\Rightarrow Xy+X(-y)=0$

$\Rightarrow -(Xy)=X(-y)=(-X)y$

4- $\forall X,y\in H,\ -(-Xy)=(-X)(-y)$

$=X[-(-y)]=[-(-X)]=(-X)(-y)$

$(-X)(-y)=Xy$

Tanım: $(H,+,\cdot)$ bir halka olsun.

1- $(\cdot)$ işlemine göre birim eleman varsa halkaya birim elemanlı halka denir.

2- $(\cdot)$ " " değişme (komütatif) özelliği varsa, halkaya değişmeli (komütatif) halka denir.

3- $(\cdot)$ işlemine göre hem birim eleman hem de değişme özelliği varsa halkaya birim elemanlı değişmeli halka denir.

4- $(\cdot)$ işlemine göre bir $x \in H$ nin tersi varsa x^{-1} ile gösterilir.

Tanım: $(H,+,\cdot)$ bir halka olsun.

1- Halkının sıfırı 0 olmak üzere,

$(\exists a,b \in H,\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a.b = 0)$ önermesi doğru ise a'ya sıfırın sol böleni, b'ye sıfırın sağ böleni denir.

2- Bir a elemanı sıfırın hem sağ hem de sol böleni ise bu a elemanına sıfırın bir böleni denir.

3- Değişmeli ve birimli bir halkada sıfırın bölenleri yoksa, halkaya tamlık bölgesi denir.

H'nin tamlık bölgesi olması için:

$[\forall x,y \in H,\ x.y = 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee y=0)]$

Tanım: $(H,+,\cdot)$ ve $(T,\oplus,\odot)$ iki halka olsunlar. Ve $f: H \to T$ bir fonksiyon olsun.

1- $\forall x,y \in H,\ f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$ ve $f(x.y) = f(x) \odot f(y)$ özellikleri sağlanıyorsa, f'ye halka homomorfizmi denir.

2- f birebir ve örten ise halka homomorfizmine, halka izomorfizmi denir.

3- $H = T$ ise halka izomorfizmine halka otomorfizmi denir.

Problemler:

1- $x,y \in Z$, $x \circ y = x+y-1$ $x * y = x+y-xy$ ise $(Z, \circ, *)$ yapısının bir halka olup olmadığını araştırın.

2- $(A,+)$ yapısı değişmeli bir grup olsun. $\forall x,y \in A$ için $x \circ y = x$ olduğuna göre, $(A,+,\circ)$ yapısı bir halka mıdır?

3- $H = \{x : x = a + b\sqrt{2},\ a,b \in Z\}$ olduğuna göre $\mathbb{R}$'de tanımlı $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemlerine göre $(H,+,\cdot)$ yapısı bir halka mıdır?

4- $(H,+,\cdot)$ değişmeli bir halka olsun. $\forall x,y \in H$ için $x \circ y = x.y + y.x$ ise $(H,+,\circ)$ yapısının da değişmeli halka olduğunu ispat edin?

5- $(x,y),(u,v) \in Z^2 = Z \times Z$ olmak üzere $(x,y) \circ (u,v) = (x+u, y+v)$ ve $(x,y) * (u,v) = (xu - yv, xv + yu)$ ise $(Z^2, \circ, *)$ yapısının bir halka olduğunu gösterin.

6- $H=\left\{A : A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ olduğuna göre matrisler kümesinde tanımlanan (+) ve (·) işlemlerine göre $(H,+,\cdot)$ yapısının bir halka olduğunu ispat edin. Matrisler halkasının bir tamlık bölgesi olmadığını ispatlayı

7- $(H_1,+,\cdot),(H_2,+,\cdot),(H_3,+,\cdot)$ üç halka olsun. Eğer $f: H_1 \longrightarrow H_2$ (izo) ve $g: H_2 \longrightarrow H_3$ (izo) halka homomorfizmi iseler $gof: H_1 \longrightarrow H_3$ 'de halka homomorfizmi midir?

Çözümler:

1- (Z,o) bir abel grubudur?

$x,y \in Z \quad xoy = x+y-1$

- $x,y \in Z,\ xoy \in H$ kapalılık öz. vardır.
- $\forall x,y,z \in Z,\ (xoy)oz = (x+y-1)oz$

$$= (x+y-1)+z-1 = x+y+z-2$$

$$xo(yoz) = x+y+z-2$$

$$\Rightarrow (xoy)oz = xo(yoz) \quad \text{değişme öz. vardır.}$$

- $\forall x \in Z,\ xoe = eox = x \qquad e=1 \in Z$ birim eleman.
- $\forall x \in Z,\ xoy = yox = e = 1 \qquad y=-x$

$$xoy = 1 \Rightarrow x+y-1 = 1 \Rightarrow y = \underline{2-x} = -x \quad \text{ters eleman.}$$

- $\forall x,y \in Z,\ xoy = yox$

$H_2)$ $\forall x,y \in Z,\ x*y = x+y-xy \in Z$ kapalılık öz. vardır.

$H_3)$ $\forall x,y,z \in Z,\ (x*y)*z = (x+y-xy)*z$

$$= (x+y-xy)+z-(x+y-xy)\cdot z$$

$$= x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

$$x*(y*z) = x*(y+z-yz)$$

$$= x+(y+z-yz)-x(y+z-yz)$$

$$= x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

$$(x*y)*z = x*(y*z) \quad \text{(birl. öz. vardır)}$$

$H_4)$ $\forall x,y,z \in H,\ x*(yoz) \overset{?}{=} (x*y)o(x*z)$

$$(xoy)*z \overset{?}{=} (x*z)o(y*z)$$

6- $H=\{A : A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ $(H,+,\cdot)$

H_1) $(H,+)$ bir abel grubudur.

1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ c+c_1 & d+d_1 \end{pmatrix} \in H$

2) $A+B=B+A$

3) $(A+B)+C=A+(B+C)$

4) $e=?$ $\forall A \in H \wedge \exists e \in H$ $e+H=H+e=A$

$e=0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$

5) $-A=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

H_2) $\forall A,B \in H$, $A.B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa_1+bc_1 & ab_1+bd_1 \\ ca_1+dc_1 & cb_1+dd_1 \end{pmatrix} \in H$

H_3) $\forall A,B,C \in H$, $(A.B).C=A(B.C)$

H_4) $\forall A,B,C \in H$, $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

$\forall A \in H$, $\exists e \in H$, $A.e=e.A=1$

7- $(H_1,+,\cdot)$, $(H_2,+,\cdot)$, $(H_3,+,\cdot)$ üç halka,

$f: H_1 \to H_2$ $g: H_2 \to H_3$ halka izomorfizmi iseler

$gof: H_1 \to H_3$ de halka izomorfizmidir ?

ispat 1// $\forall x,y \in H_1$ $(gof)(x+y)=g[f(x+y)]$ bileşke tanımı

$=g[f(x)+f(y)]$

$=g(f(x))+g(f(y))$

$=(gof)(x)+(gof)(y)$

iki özellikten. gof bir halka homomorfizmidir.

2// $(gof)(x.y)=g[f(x.y)]$ bileşke tanımı

$=g[f(x).f(y)]$ f halka izom. old. için

$=g(f(x)).g(f(y))$ g " " "

$=(gof)(x).(gof)y$ bileşke tanımı

3// gof, 1:1 ve örtendir. gof bir halka izomorfizmidir.

Tanım: (cisim)

Birimli ve değişimli bir $(F,+,\cdot)$ halkasında halkanın sıfırı hariç F nin her elemanının çarpma işlemine göre tersi varsa halkaya cisim denir.

Buna göre $(F,+,\cdot)$ yapısının cisim olabilmesi için :

C_1) $(F,+)$ Abel grubu olmalıdır.

C_2) $(F\setminus\{0\},\cdot)$ Abel grubudur.

C_3) $\cdot$ işleminin $+$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Örnek // $(Q,+,\cdot)$ yapısı bir cisimdir. Bu cisme rasyonel sayılar cismi denir.

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ " " " " " reel " " " .

Tanım: (Vektör Uzayı) :

$(V,\oplus)$ yapısı bir abel grubu, $(F,+,\cdot)$ yapısı bir cisim olsun.

$$\left.\begin{array}{l}\odot : F\times V \longrightarrow V \\ (a,\alpha) \longrightarrow (a\odot\alpha)\end{array}\right\} \text{Dış işlemi veriliyor.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\oplus : V\times V \longrightarrow V \\ (x,y) \longrightarrow (x\oplus y)\end{array}\right\} \text{iç işlem}$$

Eger,

V_1) $\forall a\in F \wedge \forall\alpha\in V,\ a\odot\alpha\in V$ (kapalılık)

V_2) $\forall a\in F \wedge \forall\alpha,\beta\in V,\ a\odot(\alpha\oplus\beta)=(a\odot\alpha)\oplus(a\odot\beta)$ (soldan dağılma)

V_3) $\forall a,b\in F \wedge \forall\alpha\in V,\ (a+b)\odot\alpha=(a\odot\alpha)\oplus(b\odot\alpha)$ (sağdan dağılma)

V_4) $\forall a,b\in F \wedge \forall\alpha\in V,\ (a.b)\odot\alpha = a\odot(b\odot\alpha) = b\odot(a\odot\alpha)$ (birleşme)

V_5) $\forall\alpha\in V \wedge 1\in F,\ 1\odot\alpha=\alpha$ (birim eleman)

önermeleri doğru ise $(V,\oplus)$ yapısı $(F,+,\cdot)$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır denir.

$[((V,\oplus),(F,+,\cdot),\odot)$ yapısı bir vektör uzayıdır.$]$

Tanım: (Cebir) :

$((V,\oplus),(F,+,\cdot),\odot)$ bir vektör uzayı olsun. V kümesinde,

$\otimes : V\times V \longrightarrow V$

$(u,v) \longrightarrow (u\otimes v)$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa V kümesi $(F,+,\cdot)$ cismi üzerinde bir cebirdir denir.

C_{e_1}) $\forall a\in F \wedge \forall u,v\in V,\ (a\odot u)\otimes v = a\odot(u\otimes v)$

$Ce_2)$ $\forall u,v,w \in V,\ (u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$

$Ce_3)$ $\forall u,v,w \in V,\ u \otimes (v \oplus w) = u$

$((V, \oplus)\ (F, +, \cdot), \odot, \otimes)$ yapısı bir cebirdir.

Doğal Sayılar :

Teorem : Bir kümeler ailesinde tanımlanan "eşit güçlü" olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat // A kümeler ailesi verilsin. β $\mathcal{A}$ da bir bağıntı ; eşit güçlü olma bağıntısı

$A, B \in \mathcal{A}$ $(A,B) \in \beta \Rightarrow$ A kümesi B kümesi ile eşit güçlüdür.

1- $\forall A \in \mathcal{A}, I_A : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} A$

$$x \longrightarrow I_A(x) = x \Rightarrow (A,A) \in \beta \quad \text{(yansıma)}$$

2- $A, B \in \mathcal{A}$, $(A,B) \in \beta \Rightarrow \exists f, f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B \Rightarrow (B,A) \in \beta$ (simetriktir.)

3- $A, B, C \in \mathcal{A}, [(A,B) \in \beta \wedge (B,C) \in \beta] \Rightarrow$

$\Rightarrow [(\exists f, f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B) \wedge (\exists g ; g : B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} C)]$

$\Rightarrow (g \circ f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} C) \Rightarrow (A,C) \in \beta$ (geçişme özelliği)

Problemler :

1- $A = \{a, b\}$ $B = \{x, y, z\}$ olsun. B kümesinin A kümesine eşit güçlü olan tüm alt kümelerini bulun.

2- A boş olmayan bir küme olsun. A ile $A \times \{a\}$ kümesinin eşit güçlü olduğunu ispat edin.

3- A, B, C, D kümeler olsun. $A \cap C = \emptyset$ ve $B \cap D = \emptyset$ olmak üzere $A \underset{\text{eşit güçlü}}{\cap} B$ ve $C \cap D$ ise $(A \cup C) \cap (B \cup D)$ olduğunu ispat edin.

4- A, B, C, D kümeler olsun. $A \cap B \wedge C \cap D$ ise $(A \times C) \cap (B \times D)$ olduğunu ispat edin.

Çözümler :

1- $\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}$

2- $f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B$

$$x \longrightarrow f(x) = (x, a)$$

i) $\forall x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \overset{?}{=} x_2$

$\forall x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1, a) = (x_2, a) \Rightarrow x_1 = x_2$ dir.

$\Rightarrow f$, 1:1 dir.

ii) $\forall y \in A \times \{a\} \Rightarrow (x_1, a) \in A \times \{a\}$ $\quad f(x) = y \;,\; x \in A \quad f$, örtendir.

3- $(A \cap C) = \phi \wedge B \cap D = \phi \;,\; (A \cup B \wedge C \cup D) \Rightarrow [(A \cup C) \cup (B \cup D)]$

$(A \cup B \wedge C \cup D) \Rightarrow \left[\left(\exists f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B \right) \wedge \left(\exists g : C \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} D \right) \right]$

$x \longrightarrow f(x) \qquad x \longrightarrow g(x)$

$F : A \cup C \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B \cup D$

$$x \longrightarrow F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \text{ ise} \\ g(x), & x \in C \text{ ise} \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x, & x > -1 \\ x^2, & x \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & x \in (-1, \infty) \\ x^2, & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$$

4- $(A \cup B \wedge C \cup D) \Rightarrow \left[\left(\exists f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B \right) \wedge \left(\exists g : C \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} D \right) \right]$

$x \longrightarrow f(x) \qquad x \longrightarrow g(x)$

$(A \times C) \cup (B \times D)$

$F : A \times C \longrightarrow B \times D$

$(x, y) \longrightarrow F(x, y)$

i) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times C \;,\; F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$

$\Rightarrow (f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), g(x_2))$

$\Rightarrow [f(x_1) = f(x_2) \wedge g(y_1) = g(y_2)]$ (sıralı ikili eşitliği tanımından)

$\Rightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2)$ $\quad f$, 1:1 dir.

$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ $\quad$ ikililerin eşitliğinden.

$\Rightarrow F$ 1:1 dir.

ii) (F örtendir ?)

Tanım : (sonlu küme, sonsuz küme)

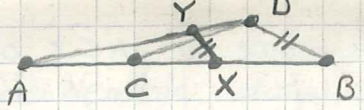
En az bir öz alt kümesine eşit güçlü olan kümeye sonsuz küme denir. Sonsuz olmayan kümeye de sonlu küme denir.

$f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} A_1 \subset A$ $\quad A$ sonsuz kümedir.

$f : A \xrightarrow{1:1} A$

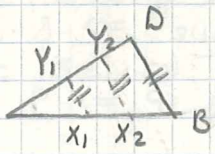
Örnek// Bir $\overline{AB}$ doğru parçasının belirttiği (bu doğru parçası üzerindeki noktaların) kümesi sonsuz kümedir.

İspat // $C \in \overleftrightarrow{AB} \wedge D \notin \overleftrightarrow{AB}$



$f : \overleftrightarrow{AB} \longrightarrow \overleftrightarrow{AD}$

$X \longrightarrow f(X) = y \ , \ \overline{XY} \parallel BD$

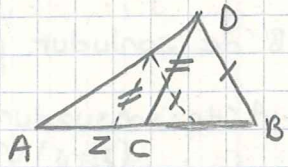


$\forall X_1, X_2 \in \overline{AB} \ , \ X_1 \neq X_2 \Rightarrow f(X_1) \neq f(X_2)$

$\Rightarrow Y_1 \neq Y_2$ 1:1 dir. ve örtendir.

$g : \overleftrightarrow{AD} \longrightarrow \overleftrightarrow{AC}$

$Y \longrightarrow g(Y) = Z \ , \ \overline{YZ} \parallel \overline{CD}$



$g \circ f : \overleftrightarrow{AB} \longrightarrow \overleftrightarrow{CD}$

$X \longrightarrow (g \circ f)(X) = Z \qquad \overleftrightarrow{CD} \subset \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{AB}$ sonsuz kümedir.

Teorem : Boş küme sonlu kümedir.

İspat // Boş kümenin hiçbir özalt kümesi yoktur, sonludur.

Teorem : $\{a\} = A$ kümesi sonludur.

İspat // A'nın boş kümeden farklı bir özalt kümesi yoktur. A bir özalt kümesine eşit güçlü olamaz. A sonludur.

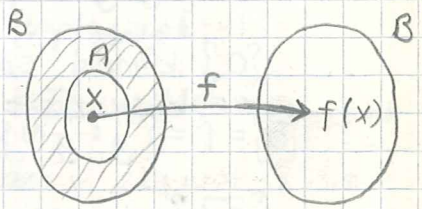
Teorem: A ve B iki küme ve $A \subseteq B$ olsun. A sonsuz küme ise B'de sonsuzdur.

İspat // A sonsuz küme $\Rightarrow \exists f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} A_1 \subset A \Rightarrow f : A \longrightarrow \underbrace{f(A)}_{A_1} \subset A$

$A \subseteq B$ B de sonsuzdur.

$\exists g : B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B_1 \subset B \qquad g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \text{ ise} \\ x, & x \in B \setminus A \text{ ise} \end{cases} \Rightarrow$ 1:1 ve örtendir.

$f(A) = g(A)$ ve $g(A) \subseteq g(B)$



$f(A) = g(A) \neq \emptyset$

$g(B) = g(A \cup (B \setminus A)) \qquad g(A) \cup g(B \setminus A) = f(A) \cup B \setminus A$

$X \in B \setminus A \ , \ g(X) = X \qquad I_{B \setminus A} \qquad g(B \setminus A) = ?$

$I_C : C \longrightarrow C$

$X \longrightarrow I_C(X) = X \rightarrow I_C(C) = C$

$g(B) = f(A) \cup (B \setminus A) \subseteq g(B) \cup (B \setminus A) \ , \ g(B) \subset B$

Sonuç olarak, $g : B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} g(B) \subseteq C$ o halde B sonsuzdur.

Teorem: A ve B iki küme ve $A \subseteq B$ olsun. B sonlu ise A'da sonludur.

İspat// $A \subseteq B$ olsun.

$\underbrace{A \text{ sonsuz}}_{p} \Rightarrow \underbrace{B \text{ de sonsuzdur.}}_{q}$ $(p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p')$

$p \Rightarrow q$ (B sonlu ise A da sonludur.)

Sonuç: A ve B iki küme ve $A \subseteq B$ olsun.

1- A sonlu ise B'de sonludur. (Doğru olmayabilir.)

2- B sonsuz ise A'da sonsuzdur. (Doğru olmayabilir.)

Teorem: En az biri sonlu olan iki kümenin kesişimi de sonludur.

İspat// A ve B iki küme ve A sonlu olsun. $A \cap B$ de sonludur.

$A \cap B \subseteq A$ ve A sonlu olduğundan $A \cap B$ de sonludur.

Teorem: A ve B iki küme ve A sonlu ise $A \setminus B$ de sonludur.

İspat// $A \setminus B = A \cap B' \subseteq A$ ve A sonlu olduğuna göre,

$A \cap B'$ de, yani $A \setminus B$ de sonludur.

Teorem: A bir küme ve $a \in A$ ise, A sonsuz küme ise $A \setminus \{a\}$ da sonsuzdur.

(Sonsuz bir kümeden sonlu sayıda elemanın atılmasıyla elde edilen kümeye de sonsuzdur denir.)

Doğal Sayılar Kümesi

$\mathcal{A}$ kümeler ailesinde eşit güçlü olma bağıntısına göre elde edilen denklik sınıflarını düşünelim. $X \in \mathcal{A}$ nın denklik sınıfı;

$\overline{X} = \{y : y \sim X\}$, $\emptyset$ denklik sınıfı; $\overline{\emptyset} = 0 = \{y : y \sim \emptyset\}$ $\emptyset = 0$

$\{0\}$ kümesi sonludur. (Çünkü tek elemanı olan kümeler eşit güçlüdür.)

$\overline{\{0\}} = 1 = \{y : y \sim \{0\}\}$

$\{0,1\}$ kümesi sonludur.

$\Rightarrow \overline{\{0,1\}} = 2 = \{y : y \sim \{0,1\}\}$

$\{0,1,2\}$ kümesi sonludur.

$\Rightarrow \overline{\{0,1,2\}} = 3 = \{y : y \sim \{0,1,2\}\}$

(Devamı, S: 195'te)

Tamsayılar :

$a,b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x+a=b$ denkleminin doğal sayılar kümesinde her zaman çözümü olmayabilir. $a \leq b$ ise $\mathbb{N}$ de çözümü vardır.

Tanım : $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olsun. Eğer $a+d=b+c$ ise bu ikililere denktirler denir ve $(a,b)\sim(c,d)$ yazılır.

$$(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow a+d=b+c$$

Örnek // 1) $(3,2),(4,3)$ ikilileri denk midir ?

$$3+3 \overset{?}{=} 2+4 \Rightarrow 6=6 \qquad (3,2)\sim(4,3)$$

2) $(3,2),(4,5)$

$$3+5=8 \qquad 2+4=6 \qquad 8\neq 6 \qquad (3,2)\not\sim(4,5)$$

Teorem : $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olsun. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de tanımlı

$$\boxed{(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c}$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat // i- $\forall (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$a+b=b+a \Rightarrow (a,b)\sim(a,b)$ yansıma öz. var. //

ii- $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow a+d=b+c \Rightarrow b+c=a+d \Rightarrow c+b=d+a$

$\Rightarrow (c,d)\sim(a,b)$ simetri öz. var. //

iii- $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$[(a,b)\sim(c,d) \wedge (c,d)\sim(e,f)] \Rightarrow [a+d=b+c \wedge c+f=d+e]$ bağıntı tanım

$\Rightarrow (a+d)+(c+f)=(b+c)+(d+e)$ taraf tarafa toplayarak

$\Rightarrow (a+f)+(c+d)=(b+e)+(c+d)$ (+) işleminin değiş. ve birl. öz.

$\Rightarrow (a+f)=(b+e)$ (+) işl. $\mathbb{N}$ de sadel. öz.

$\Rightarrow (a,b)\sim(e,f)$ geçişme öz. var. //

Bu bağıntı $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de denklik bağıntısıdır.

"$\sim$" denklik bağıntısına göre (a,b) elemanının denklik sınıfını $\overline{(a,b)}$ ile gösterelim.

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) : (x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \wedge (x,y)\sim(a,b)\}$$

Örnek// ① $(\overline{0,0}) = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \wedge (x,y) \sim (0,0)\}$

$(x,y) \sim (0,0) \Rightarrow x+0 = y+0 \Rightarrow x = y$

$(\overline{0,0}) = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots,(a,a),\ldots\}$

② $(\overline{1,0}) = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \wedge (x,y) \sim (1,0)\}$

$(x,y) \sim (1,0) \Rightarrow x+0 = y+1 \Rightarrow x = y+1$

$(\overline{1,0}) = \{(1,0),(2,1),(3,2),\ldots,(a+1,a),\ldots\}$

③ $(\overline{2,4}) = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \wedge (x,y) \sim (2,4)\}$

$(x,y) \sim (2,4) \Rightarrow x+4 = y+2 \Rightarrow x+2 = y$

$(\overline{2,4}) = \{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots,(a,a+2),\ldots\}$

Tanım: $(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de tanımlanan "$\sim$" denklik bağıntısına göre elde edilen $(\overline{a,b})$ denklik sınıflarından herbirine bir tamsayı denir. Bu sayıların kümesine de tamsayılar kümesi denir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.

Örnek// $(\overline{0,0}), (\overline{3,2}), (\overline{0,4}), (\overline{4,3}), (\overline{1,0})$ denklik sınıflarının herbiri bir tamsayı göstermektedir.

Eşitlik:

$(\overline{a,b}), (\overline{c,d}) \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(\overline{a,b}) = (\overline{c,d}) \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d)$

$\Leftrightarrow a+d = b+c$

Örnek// $(\overline{1,2}), (\overline{3,4})$ tamsayıları eşitmidirler?

$1+4 = 2+3 \Rightarrow (\overline{1,2}) = (\overline{3,4})$

Tanım: (Toplama İşleni):

$+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$[(\overline{a,b}),(\overline{c,d})] \longrightarrow (\overline{a,b}) + (\overline{c,d}) = (\overline{a+c, b+d})$

Tanım: (Çarpma İşleni):

$\bullet : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$[(\overline{a,b}),(\overline{c,d})] \longrightarrow (\overline{a,b})(\overline{c,d}) = (\overline{ac+bd, ad+bc})$

Teorem: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ matematik yapısı birimli ve değişimli bir halkadır.

İspat// 1) ⓐ $(\mathbb{Z},+)$ yapısı bir abel grubudur.

$\forall\ (\overline{a,b}) \in Z$ için $(\overline{a,b}) + (\overline{x,y}) = (\overline{x,y}) + (\overline{a,b}) = (\overline{a,b})$, $\exists\ (\overline{x,y}) \in Z$

$(\overline{a,b}) + (\overline{x,y}) = (\overline{a,b}) \Rightarrow (\overline{a+x, b+y}) = (\overline{a,b})$ + İşl. tanımı

$\Rightarrow (a+x, b+y) \sim (a,b)$ eşitlik tanımı

$\Rightarrow (a+x)+b = (b+y)+a$ denklik tanımı

$\Rightarrow x = y$ değ, bir, sad öz.

$\Rightarrow e = (\overline{x,x}) \in Z$ birim eleman vardır.

ⓑ Ters eleman :

$\forall (\overline{a,b}) \in Z,\ \exists\ (\overline{u,v}) \in Z,\ (\overline{a,b}) + (\overline{u,v}) = (\overline{u,v}) + (\overline{a,b}) = (\overline{x,x})$

$(\overline{a,b}) + (\overline{u,v}) = (\overline{x,x}) \Rightarrow (\overline{a+u, b+v}) = (\overline{x,x})$

$\Rightarrow (a+u, b+v) \sim (x,x)$

$\Rightarrow (a+u)+x = (b+v)+x$

$\Rightarrow (u+a) = (v+b)$

$\Rightarrow (u,v) \sim (b,a)$

$\Rightarrow (\overline{u,v}) = (\overline{b,a})$

$\Rightarrow (\overline{u,v}) = -(\overline{a,b}) = (\overline{b,a})$

2) Çarpma işleni : birim eleman

$\forall (a,b) \in Z,\ (\overline{a,b}).(\overline{x,y}) = (\overline{x,y}).(\overline{a,b}) = (\overline{a,b})$ olacak şekilde $(\overline{x,y}) \in Z$ var mıdır?

$(\overline{a,b}) \neq (\overline{x,x})$ olsun. $\Rightarrow (a,b) \not\sim (x,x) \Rightarrow a+x \neq b+x \Rightarrow a \neq b$

$\Rightarrow (a < b \vee b < a)$

i- $b < a$ olsun. $\Rightarrow (\overline{a,b}).(\overline{x,y}) = (\overline{a,b})$

$\Rightarrow (\overline{ax+by, ay+bx}) = (\overline{a,b})$

$\Rightarrow (ax+by, ay+bx) \sim (a,b)$

$\Rightarrow (ax+by)+b = (ay+bx)+a$

$\Rightarrow ax - bx = ay - by + a - b$

$\Rightarrow (a-b)x = (a-b)(y+1)$

$\Rightarrow x = y+1$

$\Rightarrow e = (\overline{x,y}) = (\overline{y+1, y})$

ii- $a < b \Rightarrow e = (\overline{y+1, y})$ dir.

3) $\forall (\overline{a,b}), (\overline{c,d}), (\overline{e,f}) \in Z$

$(\overline{a,b})\left[(\overline{c,d}) + (\overline{e,f})\right] \overset{?}{=} (\overline{a,b})(\overline{c,d}) + (\overline{a,b})(\overline{e,f})$ • nın + üz. sol. dağ. öz.

$\left[(\overline{a,b}) + (\overline{c,d})\right].(\overline{e,f}) \overset{?}{=} (\overline{a,b})(\overline{e,f}) + (\overline{c,d}) + (\overline{e,f})$ • nın + üz sağ. dağ. öz.

Teorem : $\forall (\overline{a,b}), (\overline{c,d}), (\overline{x,y}) \in Z$

i- $(\overline{a,b}) + (\overline{x,y}) = (\overline{c,d}) + (\overline{x,y}) \Leftrightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{c,d})$ Z de + işl. sad. öz.

ii- $x \neq y$ için $(\overline{a,b}).(\overline{x,y}) = (\overline{c,d}).(\overline{x,y}) \Leftrightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{c,d})$

iii- $(\overline{a,b}) = (\overline{c,d}) \Rightarrow (\overline{a,b})(\overline{x,y}) = (\overline{c,d})(\overline{x,y})$

İspat 1// $(\overline{a,b}) + (\overline{x,y}) = (\overline{c,d}) + (\overline{x,y})$

$\Leftrightarrow (\overline{a+x, b+y}) = (\overline{c+x, d+y})$ eşitlik tanımı

$\Leftrightarrow (a+x, b+y) \sim (c+x, d+y)$ denklik tanımı

$\Leftrightarrow (a+x)+(d+y) = (b+y)+(c+x)$ denklik tanımı

$\Leftrightarrow (a+d)+(x+y) = (b+c)+(x+y)$ + işl. birl. değ. öz.

$\Leftrightarrow a+d = b+c$ (+) işl. sadeleşt. öz.

$\Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d)$ denklik ~~eşitlik~~ tanımı.

$\Leftrightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{c,d})$ eşitlik tanım.

2// $x \neq y \Rightarrow$ i- $x > y$ $\vee$ ii- $y > x$ ödev

i- $x > y$ olsun.

$\Leftrightarrow \exists k \in N,\ x = y + k$ N de eşitsizlik tanımı.

$\Leftrightarrow (\overline{x,y}) = (\overline{y+k, y})$

$\Leftrightarrow (\overline{a,b}).(\overline{x,y}) = (\overline{c,d}).(\overline{x,y})$

$\Leftrightarrow (\overline{a,b}).(\overline{y+k,y}) = (\overline{c,d}).(\overline{y+k,y})$

$\Leftrightarrow \left[\overline{a(y+k)+by,\ ay+b(y+k)}\right] = \left[\overline{c(y+k)+dy,\ cy+d(y+k)}\right]$

$\Leftrightarrow \left[a(y+k)+by,\ ay+b(y+k)\right] \sim \left[c(y+k)+dy,\ cy+d(y+k)\right]$ eşitlik tanımı.

$\Leftrightarrow \left[\cancel{ay}+ak+\cancel{by}\right]+\left[\cancel{cy}+\cancel{dy}+dk\right] = \left[\cancel{ay}+\cancel{by}+bk\right]+\left[\cancel{cy}+ck+\cancel{dy}\right]$

$\Leftrightarrow (a+d)k = (b+c)k$

$\Leftrightarrow a+d = b+c$

$\Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d)$

$\Leftrightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{c,d})$

Teorem: $(Z,+,\cdot)$ halkası bir tamlık bölgesidir.

İspat// $\forall (\overline{x,y}) \in Z,\ (\overline{x,y}).(\overline{a,a}) = (\overline{xa+ya,\ xa+ya}) = (\overline{a,a})$

$\Rightarrow (\overline{x,y})(\overline{a,a}) = (\overline{a,a}) \qquad (x.0=0)$

$\forall (\overline{x,y}),(\overline{u,v}) \in Z,\ (\overline{x,y}).(\overline{u,v}) = (\overline{a,a}) \overset{?}{\Rightarrow} [(\overline{x,y}) = (\overline{a,a})] \vee \underbrace{[(\overline{u,v}) = (\overline{a,a})]}_{\text{ödev}}$

Kabul edelim ki, $(\overline{x,y}) \neq (\overline{a,a})$ olsun. (ödev)

Problemler:

$(\overline{a,b}) + (\overline{b,a}) \underset{=(\overline{0,0})}{=?} \qquad (\overline{a,a-1}) + (\overline{a,a-2}) = ?$ önermelerinin doğru olması için ? yerine ne yazılmalı?

$a,b,x,r \in N,\ (\overline{a+x,x}) = (\overline{a+1,1}),\ (\overline{a,b}) + (\overline{r,r}) = (\overline{a,b})$

$(\overline{a,b})(\overline{r,r}) = (\overline{r,r})$

Teorem: $(\overline{a,b}) \in Z$ olsun $\forall x \in N$ ve bir $k \in N$ için

1- $(\overline{a,b}) = (\overline{x+k,x}) \Leftrightarrow a = b+k$

2- $(\overline{a,b}) = (\overline{x,x}) \Leftrightarrow a = b$

3- $(\overline{a,b}) = (\overline{x,x+k}) \Leftrightarrow b = a+k$

} önermelerinden sadece birisi doğrudur.

İspat// 1- $(\overline{a,b}) = (\overline{x+k,x}) \Leftrightarrow (a,b) \sim (x+k,x)$ (Eşitlik $\Leftrightarrow$ denklik tanımı)

$\Rightarrow a+x = b+(x+k)$ denklik tanımı

$\Rightarrow a = b+k$ tamsayılarda (+) işl. sad. öz.

2- $(\overline{a,b}) = (\overline{x,x}) \Leftrightarrow (a,b) \sim (x,x)$

$\Rightarrow a+x = b+x$

$\Rightarrow a = b$

$(\overline{a,b}) = (\overline{x,x+k}) \Rightarrow (a,b) \sim (x,x+k)$

$\Rightarrow a+(x+k) = b+x$

$\Rightarrow a+k = b$

- $a,b \in N$ veriliyor. $\Rightarrow a>b,\ a=b,\ a<b$ ancak birisi doğrudur.

$a>b \Rightarrow \exists k \in N,\ a = b+k$

$a=b \Rightarrow \exists k \in N\ \ a=b$

$a<b \Rightarrow \exists k \in N\ \ b = a+k$ dan sadece birisi doğrudur.

$\Rightarrow$ 1,2,3 den sadece birisi doğrudur.

Sonuçlar: $(a,b) \in Z$ olsun.

1- $a>b$ ise $(\overline{a,b}) = (\overline{b+k,b}) = (\overline{k,0}) = (\overline{a-b,0})$

$$\Rightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{a-b,0})$$

2- $a=b$ ise $(\overline{a,b}) = (\overline{0,0}) = (\overline{a,a})$

3- $a<b$ ise $(\overline{a,b}) = (\overline{0,b-a})$ ile gösterilebilir.

Teorem: $Z^* = \{(\overline{a,b}) : (\overline{a,b}) \in Z \wedge a \geq b\}$ olsun. $(Z^*,+,\cdot)$ matematik yapısı $(N,+,\cdot)$ matematik yapısına izomorftur.

İspat// $f: Z^* \longrightarrow IN$ $\quad (\overline{a,b}) \in Z^* \Rightarrow (\overline{a,b}) \in Z \wedge a \geq b$

$$(\overline{a,b}) = (\overline{a-b,0}) = (\overline{k,0}), \; k \in IN$$

$$(\overline{k,0}) \longrightarrow f(\underbrace{\overline{k,0}}_{x}) = k \text{ olsun}$$

$$f(x) = k$$

I) $\forall (\overline{a,0}), (\overline{b,0}) \in Z^*$ için

$$(\overline{a,0}) \neq (\overline{b,0}) \Rightarrow (a,0) \not\sim (b,0)$$

$$\Rightarrow a+0 \neq 0+b \Rightarrow a \neq b$$

$$\Rightarrow f(\overline{a,0}) \neq f(\overline{b,0}) \Rightarrow f \text{ 1:1 dir.}$$

II) $\forall y \in IN$ için $\exists x \in Z^*$, $f(x)=y$, $x = (\overline{y,0}) \in Z^*$ f örtendir.

III) $\forall (\overline{a,0}), (\overline{b,0}) \in Z^*$, $f[(\overline{a,0}) + (\overline{b,0})] \overset{?}{=} f[(\overline{a,0})] + f[(\overline{b,0})]$

$f[(\overline{a,0}) + (\overline{b,0})] = f[(\overline{a+b, 0+0})$ $\quad$ Z de (+) işl. tanımı

$= f[(\overline{a+b,0})]$

$= a+b$ $\quad$ fonksiyon tanımı.

$= f[(\overline{a,0})] + f[(\overline{b,0})]$

IV) $f[(\overline{a,0}) \cdot (\overline{b,0})] = f[(ab+0\cdot 0, a0+0b)]$

$= f[(ab,0)] = ab$

$= f[(\overline{a,0})] \cdot f[(\overline{b,0})]$

$Z^* \sim IN$

$(\overline{x,0}) = x$ $\quad$ tamsayı $\quad$ doğalsayı

$(\overline{a,b}) = (a-b,0) = a-b$ $\quad$ $a>b$

$(\overline{1,0}) = (\overline{r+1,r}) = 1$ $\quad$ $(\overline{0,0}) = 0$

Tanım: a) $(\overline{a,b}) \in Z$ olsun. $a>b$ ise $(\overline{a,b})$ tamsayısına pozitif tamsayı denir ve $(\overline{a,b}) = (\overline{a-b,0}) = a-b$

b) $a=b$ ise $(\overline{a,b})$ tamsayısına sıfır denir ve $(\overline{a,b})=0$

c) $b>a$ ise $(\overline{a,b})$ tamsayısına negatif tamsayı denir. $(\overline{a,b}) = (\overline{0,b-a}) = -(b-a)$ şeklindedir. Buna göre pozitif tamsayıların kümesini Z^+, negatif tamsayıların kümesini Z^- ile gösteririz.

$$\mathbb{N} = Z^+ \cup \{0\}, \quad Z = \mathbb{N} \cup Z^- = Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$$

$$(\overline{x,0}) = x, \quad (\overline{0,y}) = -y$$

$$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Tanım: (Çıkarma işleni):

$x,y \in Z$ olsun. $x+(-y)$ tamsayısına x ve y tamsayılarının farkı (x ten y nin farkı) denir ve $x-y$ ile gösterilir. $x-y = x+(-y)$

Farkı bulmak için yapılan işleme çıkarma işleni denir.

Teorem: $\forall x,y,z \in Z$ için,

a- $x-y = x+(-1)y$

b- $z(x-y) = (zx)-(zy)$

c- $(x-y)z = (xz)-(yz)$

$\Big\}$ $(\cdot)$ nın $(-)$ üz. dağ. öz.

İspat: a) $x = (\overline{a,b})$, $y = (\overline{c,d}) \Rightarrow -y = (\overline{d,c}) \Rightarrow x+(-y) = (\overline{a,b}) + (\overline{d,c})$

$$= (\overline{a+d, b+c})$$

$$x+(-1)y = (\overline{a,b}) + (\overline{0,1}).(\overline{c,d})$$

$$= (\overline{a,b}) + (\overline{0.c+1d, 0.d+1.c}) = (\overline{a,b}) + (\overline{d,c}) = (\overline{a+d, b+c})$$

$$\Rightarrow x+(-y) = x+(-1)y$$

b) $z(x-y) = z[x+(-y)] = zx+z(-y) = zx+z(-1)y = zx+(-1)(zy) = (zx)-(zy)$

Problemler:

1- $(-3)+(-2) = (-5)$

2- $(-x)(-y) = xy$

3- $\forall x \in Z,\ x = -x \Rightarrow x = 0$

4- $x^2 = (-x)^2$

5- $x-(-x) = 2x$ Önermelerinin doğruluğunu ispat ediniz.

1- $(-3)+(-2) = (\overline{0,3}) + (\overline{0,2}) = (\overline{0+0,\ 3+2}) = (\overline{0,5}) = -5$

2- $(-x)(-y) = (-1)x\,(-1)y = (-1)(-1)(xy) = xy$

$(-1)(-1) \overset{?}{=} 1$

$(-1)(-1) = (\overline{0,1})(\overline{0,1}) = (\overline{0.0+1.1,\ 0.1+1.0}) = (\overline{1,0}) = 1$ //

3- $x = -x \Rightarrow x = (-1)x \Rightarrow x = (\overline{0,1})x \Rightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{0,1})(\overline{a,b})$ $\quad x = (\overline{a,b})$

$\Rightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{0.a+1.b,\ 0b+1.a}) \Rightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{b,a})$

$\Rightarrow (\overline{a,b}) \sim (\overline{b,a}) \Rightarrow a+a = b+b \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow x = (\overline{a,a}) = (\overline{0,0}) = 0 \Rightarrow x = 0$

Tanım: $a,b \in \mathbb{Z}$, $a = (\overline{m,n})$, $b = (\overline{u,v})$ olsun.

1°) $a<b \Leftrightarrow m+v < n+u$ veya $b>a$

"$a=b$ veya $a<b$" önermesi kısaca $a \leqslant b$ yazılır.

2°) $a \leqslant b \Leftrightarrow m+v \leqslant n+u$

Teorem: $a,b \in \mathbb{Z}$ olsun. $a<b$ olması için gerek ve yeter şart $a+x=b$ olacak şekilde bir pozitif x tamsayısının bulunmasıdır.

$a+x=b \Leftrightarrow a<b$

İspat// $a = (\overline{m,n})$, $b = (\overline{u,v})$ olsun.

$a<b \Leftrightarrow m+v < n+u \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ (m+v)+k = n+u$

$\Leftrightarrow (m+k)+v = n+u \Leftrightarrow (m+k,n) \sim (u,v) \Leftrightarrow (\overline{m+k,n}) = (\overline{u,v})$

$\Leftrightarrow (\overline{m,n}) + (\overline{k,0}) = (\overline{u,v}) \Leftrightarrow a+x = b \quad x \in \mathbb{Z}^+$

Teorem: $a,b,c,d,x \in \mathbb{Z}$ olsun.

a- $a<b \Leftrightarrow a+c < b+c$

b- $(a<b \wedge c<d) \Rightarrow a+c < b+d$

c- $x>0$ için $ax<bx \Leftrightarrow a<b$

d- $x<0$ için $ax<bx \Leftrightarrow a>b$

İspat// $a = (\overline{m,n})$, $b = (\overline{u,v})$, $c = (\overline{r,s})$, $d = (\overline{t,w})$, $x = (\overline{y,z})$ olsun

a) $a<b \Leftrightarrow (\overline{m,n}) < (\overline{u,v}) \Leftrightarrow m+v < n+u$

$\Leftrightarrow (m+v)+(r+s) < (n+u)+(r+s)$

$\Leftrightarrow (m+r)+(v+s) < (n+s)+(u+r)$

$\Leftrightarrow (\overline{m+r, n+s}) < (\overline{u+r, v+s}) \Leftrightarrow (\overline{m,n}) + (\overline{r,s}) < (\overline{u,v}) + (\overline{r,s})$

$\Leftrightarrow a+c < b+c$

Teorem: Z tamsayılar kümesinde tanımlanan "$\leq$" bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Z kümesi bu bağıntıya göre tam sıralıdır

Problemler:

1- $x \in Z$ ve $y \in Z^+$ ise $x-y < x+y$ olduğunu ispat edin.

2- $s,t \in \mathbb{N}$ olsun. $-1 < (\overline{s,t}) < 1$ ise $s=t$ olduğunu ispat edin.

3- 0 ile 1 arasında hiçbir tamsayının bulunmadığını ispat edin.

Çözüm // 2- $-1 < (\overline{s,t}) < 1 \Rightarrow [-1 < (\overline{s,t}) \wedge (\overline{s,t}) > 1]$

$\Rightarrow [(\overline{0,1}) < (\overline{s,t}) \wedge (\overline{s,t}) < (\overline{1,0})]$

$\Rightarrow (0+t < 1+s) \wedge (s+0 < t+1)$

$\Rightarrow [t < s+1 \wedge s < t+1]$

$\Rightarrow t+1 \leq s+1 \wedge s+1 \leq t+1$

$\Rightarrow (t \leq s \wedge s \leq t)$

$\Rightarrow s = t$

3- Aksini kabul edelim. Yani 0 ile 1 arasında bir tamsayı varsa

$\Rightarrow 0 < (\overline{s,t}) < 1 \wedge (\overline{s,t}) \in Z$

$\Rightarrow 0 < (\overline{s,t}) \wedge (\overline{s,t}) < 1$

$\Rightarrow (\overline{0,0}) < (\overline{s,t}) \wedge (\overline{s,t}) < (\overline{1,0})$

$\Rightarrow 0+t < 0+s \wedge s+0 < t+1$

$\Rightarrow t < s \wedge s < t+1$

$\Rightarrow t < s \wedge s+1 \leq t+1$

$\Rightarrow t < s \wedge s \leq t$ çelişkidir.

$\Rightarrow$ kabülümüz yanlıştır.

Tanım: (Mutlak Değer):

$x \in Z$ olsun. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $|x|$ doğal sayısına x'in mutlak değeri denir.

Teorem: (Mutlak Değerin Özellikleri): $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için

a- $|x| = |-x|$

b- $|x|^2 = |x^2| = x^2$

c- $x \leq |x| \wedge -x \leq |x| \wedge |-x| \leq x \leq |x|$

d- $|x| \leq y \Leftrightarrow x \leq y \vee -x \leq y$

e- $|x| \geq y \Leftrightarrow x \geq y \vee -x \geq y$

f- $|x.y| = |x||y|$

g- $|x|-|y| \leq |x+y|$

h- $|x+y| \leq |x|+|y|$ (üçgen eşitsizliği)

ı- $|x|-|y| \leq |x-y|$

k- $|x-y| \leq |x|+|y|$

İspat // a) $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$ $\quad |-x| = \begin{cases} -x, & -x \geq 0 \\ -(-x), & -x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow |x| = |-x|$

b) $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$ $\quad |x|^2 = |x|.|x| =$

1° $x > 0 \Rightarrow |x|^2 = x.x = x^2$

2° $x < 0 \Rightarrow |x|^2 = (-x)(-x) = x^2$

$\Big\} |x|^2 = x^2 = |x^2|$

f) $|xy| = |x|.|y|$

$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$ ve $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow |xy| = xy = |x|.|y|$

$x \geq 0, y < 0 \Rightarrow |xy| = -(xy) = x(-y) = |x|.|y|$

$x < 0, y \geq 0 \Rightarrow |xy| = -(xy) = (-x)y = |x|.|y|$

$x < 0, y < 0 \Rightarrow |xy| = xy = (-x)(-y) = |x|.|y| \Rightarrow \forall x,y \in \mathbb{Z}, |xy| = |x|.|y|$ //

g) $|x|-|y| \leq |x+y|$

$(x \geq 0, y \geq 0) \Rightarrow |x|-|y| = x-y < x+y \leq |x+y|$

$(x \geq 0, y < 0) \Rightarrow |x|-|y| = x+y \leq |x+y|$

$(x < 0, y \geq 0) \Rightarrow |x|-|y| = -x-y = -(x+y) \leq |x+y|$

$(x < 0, y < 0) \Rightarrow |x|-|y| = -x+y < |x+y|$

$\Big\} |x|-|y| \leq |x+y|$

(Devamı s: 212 de)

Teorem: $a,b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olsun. a sayısı b sayısına kalanlı olarak bölünebilir. Bu bölme işleminde bölüm ve kalan tektir.

İspat: $a = bq + r \wedge 0 \leq r < |b|$

1° Varlığın İspatı;

a) $a = 0$ ise $0 = b.0 + 0$ $\quad q = r = 0$

b) $a \neq 0$ ise, $\{a - bx : x \in \mathbb{Z}\} = A$ olsun.

i- $b < 0$ ise $b \leq -1 \Rightarrow b|a| \leq -|a|$ her iki tarafı $|a|$ ile çarparak

$$\Rightarrow b|a| \leq -|a| \leq a$$

$$\Rightarrow b|a| \leq a$$

$$\Rightarrow a - b|a| \geq 0 \wedge a - b|a| \in A$$

ii- $b > 0$ ise $b \geq 1 \Rightarrow b(-|a|) \leq -|a|$

$$\Rightarrow b(-|a|) \leq -|a| \leq a$$

$$\Rightarrow b(-|a|) \leq a$$

$$\Rightarrow a - b(-|a|) \geq 0 \wedge a - b(-|a|) \in A$$

Sonuç: A'nın negatif olmayan elemanları da vardır.

$\Rightarrow r = a - bq$ olan pozitif sayıların kümesinin bir en küçük r elemanı vardır. ($\Rightarrow a = bq + r \wedge r \geq 0$ dır.)

Ayrıca $r \overset{?}{<} |b| \Rightarrow$ Aksini kabul edelim. Yani $r \geq |b|$ olsun.

$$\Rightarrow r - |b| \geq 0 \Rightarrow r - |b| = \begin{cases} r - b, & b > 0 \\ r + b, & b < 0 \end{cases} = \begin{cases} a - bq - b, & b > 0 \\ a - bq + b, & b < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a - b(q+1), & b > 0 \\ a - b(q-1), & b < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r - |b| \leq r \Rightarrow \begin{cases} a - b(q+1) \leq r, & b > 0 \\ a - b(q-1) \leq r, & b < 0 \end{cases}$$ çelişkidir. Yani kabulümüz yanlış.

$r \geq |b|$ yanlış. $\Rightarrow r < |b|$ dir. $\Rightarrow a = bq + r \wedge r < |b|$ vardır.

2° Tekliğin İspatı;

Aksini farzedelim yani $(a = bq_1 + r_1 \wedge 0 \leq r < |b|) \wedge$

$(a = bq_2 + r_2 \wedge 0 \leq r_1 < |b|)$

$\Rightarrow bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$

$\Rightarrow b(q_1-q_2)=r_2-r_1 \Rightarrow b \,/\, r_1-r_2$

$\Rightarrow |b| \,/\, r_1-r_2$

$\Rightarrow |b| \,/\, |r_1-r_2| \wedge |r_1-r_2|<|b|$

$\Rightarrow |r_1-r_2|=0$

$\Rightarrow r_1-r_2=0 \Rightarrow r_1=r_2$

$\Rightarrow b(q_1-q_2)=0$ $\quad b\neq 0$ dır. (hipotezden)

$\Rightarrow q_1=q_2 \wedge r_1=r_2$ önermesi doğrudur.

Bir kalanlı bölme işleminde bölüm ve kalan tektir.

Teorem: $a,b,m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. a nın b'ye bölümünde (kalanlı), bölüm q ve kalan r ise ma nın, mb ye bölümünde, bölüm q ve kalan mr dir.

İspat// $a=bq+r \wedge 0\leq r<|b| \Rightarrow ma=(mb)q+mr \wedge m.0\leq mr<m|b|$

$\Rightarrow ma=(mb)q+mr \wedge 0\leq mr<|mb|$

Teorem: $a,b,m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. ma nın, mb ye bölümünde bölüm q ve kalan mr ise a'nın b'ye bölümünde bölüm q ve kalan r dir. (Bir önceki teoremin tersidir.)

İspat// $ma=(mb)q+mr \wedge 0\leq mr<|mb|$

$\Rightarrow ma=m(bq+r) \wedge m.0\leq mr<m|b|$

$\Rightarrow a=bq+r \wedge 0\leq r<|b|$

Teorem: $a,b,m \in \mathbb{Z}$ ve $m\neq 0$ olsun.

$(a=mq+r,\ 0\leq r<|m|) \wedge (b=mq'+r',\ 0\leq r'<|m|)$ olmak üzere

$m/a-b \Leftrightarrow r=r'$

İspat// $m/a-b \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{Z},\ a-b=mt$ (bölüne bölme tanımından)

$\Leftrightarrow a=b+mt$

$\Leftrightarrow a=mq'+r'+mt$ (b yerine değeri yazılarak)

$\Leftrightarrow a=m(q'+t)+r' \wedge 0\leq r'<|m|$ (paranteze alarak)

$\Leftrightarrow (a=m(q'+t)+r' \wedge 0\leq r'<|m|) \wedge (a=mq+r \wedge 0\leq r<|m|)$

$\Leftrightarrow r=r'$

Problemler :

1- Ardışık iki çift sayıdan birinin dört ile bölünebileceğini gösterin.

2- a) " " sayının çarpımının 2 ile bölünebileceğini " .

b) " " " küpleri farkının 2 eksiğinin 6 ile bölünebileceğini " .

3- İki basamaklı bir sayı ve bunun basamaklarının ters yazılmasıyla elde edilen sayının toplamının 11 ile bölünebileceğini gösterin.

4- Altı basamaklı bir sayının birler ve binler, onlar ve onbinler, yüzler ve yüzbinler basamaklarındaki rakamlar aynı ise bu sayının, 7, 11 ve 13 ile bölünebileceğini gösterin.

5- $a,b,c \in \mathbb{Z}$ olsun. $3/a+1 \wedge 3/b+1 \wedge 3/c+1$ ise

a) $3/a+b+c$ b) $3/a^2+b^2+c^2$ c) $3/a^2-b^2$ önermelerinin doğru olduğunu ispat edin.

6- a doğal sayısı tek ise bu doğal sayının karesinin $8n+1$ şeklinde yazılabileceğini gösterin.

7- -2378 sayısının 23 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalan nedir?

8- a tamsayısının b tamsayısına bölümünde bölüm q ve kalan r ise $a+kb$, $a-kb$, $k \in \mathbb{Z}$ tamsayılarının b ye bölümünde bölüm ve kalanı bulunuz?

9- a ve b tamsayılarının bir d tamsayısına bölümünde elde edilen kalanlar, r ve r' ise $ab-rr'$ tamsayısının d ye bölündüğünü gösterin?

10- Bir tamsayının karesinin birler basamağında 0,1,4,5,6,9 rakamlarından başka rakamın bulunmayacağını gösterin?

Çözümler :

1- $k \in \mathbb{Z}$ $a=2k$ $b=2k+2=2(k+1)$

• k tek $\Rightarrow k=2r+1 \Rightarrow 2k+2=2(2r+1+1)=4(r+1) \Rightarrow 4/2k+2$, $r \in \mathbb{Z}$

• k çift $\Rightarrow k=2s \wedge s \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2k=4s \Rightarrow 4/2k \Rightarrow 4/a \vee 4/b$

3- $\left.\begin{array}{l} x=(ab)_{10}=10a+b \\ y=(ba)_{10}=10b+a \end{array}\right\} x+y=11a+11b=11(a+b) = 11/x+y$ (bölünebilme tanımı

4- $(abcabc)_{10} = 10^5 a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 a + 10 b + c$

$= c(1+10^3) + 10b(1+10^3) + 100a(1+10^3)$

$= (1+10^3)(c+10b+100a)$

$= (7.11.13)(c+10b+100a)$

$\Rightarrow (7/x \wedge 11/x \wedge 13/x)$

5- $3/a+1 \quad 3/b+1 \quad 3/c+1$

$\Rightarrow (\exists r \in \mathbb{Z}, a+1=3r) \wedge (\exists t \in \mathbb{Z}, b+1=3t) \wedge (\exists s \in \mathbb{Z}, c+1=3s)$

$\Rightarrow a=3r-1 \wedge b=3t-1 \wedge c=3s-1$

a- $3/a+b+c$, $a+b+c = (3r-1)+(3t-1)+(3s-1)$

$= 3(r+t+s)-3$

$= 3(r+t+s-1) \Rightarrow 3/a+b+c$

b- $3/a^2+b^2+c^2$, $a^2+b^2+c^2 = (3r-1)^2+(3t-1)^2+(3s-1)^2$

$= 9r^2-6r+1+9t^2-6t+1+9s^2-6s+1$

$= 3(3r^2-2r+3t^2-2t+3s^2-2s+1)$

$\Rightarrow 3/a^2+b^2+c^2$

c- $3/a^2-b^2$, $a^2-b^2 = (3r-1)^2-(3t-1)^2$

$= (9r^2-6r+1)-(9t^2-6t+1)$

$= 9r^2-9t^2-6r+6t$

$= 3(3r^2-3t^2-2r+2t) \Rightarrow 3/a^2-b^2$

6- a tek $\Rightarrow a=2k+1 \wedge k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^2=(2k+1)^2 \Rightarrow a^2=4k^2+4k+1 \Rightarrow a^2=4k(k+1)+1$

i- k tek $\Rightarrow k=2r+1 \wedge r \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^2=4(2r+1)(2r+1+1)+1$

$\Rightarrow a^2=8(2r+1)(r+1)+1$

$\Rightarrow a^2=8n+1 \qquad n=(2r+1)(r+1)$

ii- k çift $\Rightarrow k=2s \wedge s \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^2=8s(2s+1)+1$

$\Rightarrow a^2=8n+1 \qquad n=s(2s+1)$

7- $-2378 = 23q + r \wedge 0 \leq r < |23|$

$$\begin{array}{r|l} -2378 & 23 \\ \hline \pm 23 & -104 \\ \hline 0-78 & \\ \pm 92 & \\ \hline +14 & \end{array}$$

$-2378 = 23(\underset{\text{bölüm}}{-104}) + \underset{\text{kalan}}{14}$

8- $a = bq + r \wedge 0 \leq r < |b|$

- $\Rightarrow a + kb = bq + r + kb \wedge 0 \leq r < |b|$

  $\Rightarrow a + kb = b(q+k) + r \wedge 0 \leq r < |b|$

  $q+k$ = bölüm r = kalan

- $\Rightarrow a - kb = bq + r - kb \wedge 0 \leq r < |b|$

  $\Rightarrow a - kb = b(q-k) + r \wedge 0 \leq r < |b|$

  $q-k$ = bölüm r = kalan.

9- $(a = dq_1 + r \ , \ 0 \leq r < |b|) \wedge (b = dq_2 + r' \ , \ 0 \leq r' < |b|)$

$\Rightarrow ab - rr' = (dq_1 + r)(dq_2 - r') - rr'$

$\Rightarrow ab - rr' = d^2 q_1 q_2 + dq_1 r' + dq_2 r + \cancel{rr'} - \cancel{rr'}$

$\Rightarrow ab - rr' = d(dq_1 q_2 + q_1 r' + q_2 r)$

$\Rightarrow d / ab - rr'$

- Bir Tamsayının Bölenleri -

Herhangi bir a tamsayısı verilsin. Eğer $a = 0$ ise 0 'dan farklı her tamsayı a nın bölenidir. Eğer $a \neq 0$ ise $-1, +1, -a, +a$ tamsayıları a nın bölenleridir. a'nın bu bölenlerden başka bölenleri varsa, $-(a-1), \ldots, -3, -2, 2, 3, \ldots, (a-1)$ sayılarının a'yı bölenleri araştırılır.

Örnek// 8 sayısının bölenleri kümesini bulunuz?

$\{-8, -7, \ldots -2, -1, 1, 2, \ldots, 7, 8\}$ kümesinin alt kümesidir. Bu da, $\{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$ kümesidir ve sembolik olarak $\{B(a)\}$ ile gösterilir.

$\{B(8)\} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

- Tamsayıların Ortak Bölenleri -

Tanım: Sıfırdan farklı a ve b tamsayılarının her ikisini de bölen x tamsayılarına a ve b tamsayılarının ortak bölenleri denir.

a ve b tamsayılarının ortak bölenlerinin kümesi sembolik olarak,

$\{OB(a,b)\}$ ile gösterilir.

$$\{OB(a,b)\} = \{x : x/a \wedge x/b\} = \{x : x \in \{B(a)\} \wedge x \in \{B(b)\}\}$$

$$\Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{B(a)\} \cap \{B(b)\}$$

Örnek // $\{B(8)\} = \{-8,-4,-2,-1,1,2,4,8\}$

$\{B(6)\} = \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$

$\{OB(6,8)\} = \{-2,-1,1,2\} = \{B(8)\} \cap \{B(6)\}$

Teorem: $a,b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$ olsun. $b/a \Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{B(b)\}$

İspat // $b/a \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z},\ a = bq$

$\forall x \in \{B(b)\} \Rightarrow x/b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Z},\ b = rx$

$\Rightarrow a = rxq = x(rq) \Rightarrow x/a \Rightarrow x \in \{B(a)\}$

$\forall x \in \{B(b)\} \Rightarrow x \in \{B(a)\}$

$\Rightarrow \{B(b)\} \subseteq \{B(a)\}$

$\Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{B(b)\} \cap \{B(a)\} = \{B(b)\}$

$\Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{B(b)\}$

Örnek // 6 ve 24 sayılarının OB kümesini bulunuz.

$6/24$ $\{OB(6,24)\} = \{B(6)\} = \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$

Teorem: $a,b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olsun. $a = bq + r \wedge 0 \leq r < |b|$ ise

$\{OB(a,b)\} = \{OB(b,r)\}$

İspat // $\forall x \in \{OB(a,b)\} \Leftrightarrow (x/a \wedge x/b)$

$\Leftrightarrow (x/a-bq \wedge x/b)$

$\Leftrightarrow (x/r \wedge x/b)$

$\Leftrightarrow x \in \{OB(r,b)\} \Rightarrow x \in \{OB(b,r)\}$

$\Leftrightarrow \{OB(a,b)\} \subseteq \{OB(b,r)\}$

$\Leftrightarrow \{OB(b,r)\} \subseteq \{OB(a,b)\}$

$\Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{OB(b,r)\}$

Örnek// 28 ve 36 nın OB'ini bulunuz.

i - $36 = 28.1 + 8$ $\{OB(28,36)\} = \{OB(28,8)\}$

ii - $28 = 8.3 + 4$ $\{OB(28,8)\} = \{OB(8,4)\}$

iii - $4/8$ $\{OB(8,4)\} = \{B(4)\} = \{-4,-2,-1,1,2,4\}$

Sonuç// $\{OB(36,28)\} = \{B(4)\} = \{-4,-2,-1,1,2,4\}$

Tanım: Sıfırdan farklı $a_1, a_2, ---, a_n$ tamsayılarının herbirini tam olarak bölen bir X tamsayısına bu sayıların bir ortak böleni denir. $a_1, a_2, ---, a_n$ tamsayılarının ortak bölenlerinin kümesi,

$\{OB(a_1, a_2, ---, a_n)\}$ şeklinde gösterilir. Ve

$\{OB(a_1, a_2, ---, a_n)\} = \{B(a_1)\} \cap \{B(a_2)\} \cap ... \cap \{B(a_n)\}$ kümesidir.

Tanım: (Tamsayıların ortak bölenlerinin en büyüğü):

En az biri sıfırdan farklı iki tamsayı a ve b olsunlar. a ve b nin ortak bölenleri kümesinin en büyük elemanına a ve b tamsayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü denir. Ve $\boxed{OBEB(a,b)}$ ile gösterilir.

Örnek// $\{OB(28,36)\} = \{-4,-2,-1,1,2,4\}$

$OBEB(28,36) = 4$

Teorem: (Öklid Algoritması):

En az biri sıfırdan farklı iki tamsayı a ve b olsun. $OBEB(a,b) = r_n$ olacak şekilde birtek r_n pozitif tamsayısı vardır. Bu r_n sayısı a ve b sayılarının lineer toplamı olarak yazılabilir. (Yani, a ve b verildiğinde; m ve n tamsayıları vardır ki $r_n = ma + nb$ yazılabilir.)

İspat// OBEB tanımından dolayı $OBEB(a,b) = OBEB(|a|,|b|)$

1°) $a = b$ olsun. $OBEB(a,b) = a = b$

2°) $a \neq b \wedge b \neq 0$ olsun. $\Rightarrow a = bq + r \quad 0 \leq r < b$ iki durum vardır;

I- a) $r = 0 \Rightarrow a = bq \Rightarrow b/a \Rightarrow OBEB(a,b) = b$

b) $r \neq 0 \Rightarrow \{OB(a,b)\} = \{OB(b,r)\} \Rightarrow OBEB(a,b) = OBEB(b,r)$

II- b yi r ye kalanlı olarak bölelim. $b = rq_1 + r_1 \wedge 0 \leq r_1 < r$

a) $r_1 = 0 \Rightarrow b = rq_1 \Rightarrow OB(b,r) = \{B(r)\} \Rightarrow OBEB(b,r) = r$

b- $r_1 \neq 0$ ise $OB(b,r) = OB(r,r_1)$

III - r'yi r_1'e kalanlı olarak bölelim. $\Rightarrow r = r_1 \cdot q_2 + r_2 \wedge 0 \leq r_2 < r_1$

a) $r_2 = 0 \Rightarrow r = r_1 q_2 \Rightarrow \{OB(r,r_1)\} = \{B(r_1)\} \Rightarrow OBEB(r,r_1) = r_1$

$\Rightarrow OBEB(a,b) = OBEB(b,r) = OBEB(r,r_1) = r_1$

b) $r_2 \neq 0 \Rightarrow \{OB(r,r_1)\} = \{OB(r_1,r_2)\}$

IV - r_1'i r_2'ye kalanlı olarak bölelim. $\Rightarrow r_1 = r_2 q_3 + r_3 \wedge 0 \leq r_3 < r_2$

a) $r_3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 q_3 \Rightarrow r_2 / r_1 \Rightarrow \{OB(r_1,r_2)\} = \{B(r_2)\} \Rightarrow OBEB(r_1,r_2) = r_2$

$\Rightarrow OBEB(a,b) = r_2$

b) $r_3 \neq 0 \Rightarrow \{OB(r_1,r_2)\} = \{OB(r_2,r_3)\}$

$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$ ve $r_n = 0 \Rightarrow OBEB(a,b) = OBEB(b,r) = OBEB(r,r_1) \ldots$

$\ldots\ldots = OBEB(r_{n-2}, r_{n-1}) = r_n = OBEB(r_{n-1}, r_n)$

$r_{n-1} = r_n q_n + 0$

$\Rightarrow OBEB(a,b) = r_n$

a ve b r_n'in lineer toplamı olarak yazılır ?

$r_n = r_{n-2} - r_{n-1} q_n$

$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} \Rightarrow r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-1}$

$r_n = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-1}) q_n$

$r_n = r_{n-2}(1 + q_{n-1}) q_n - r_{n-3} q_n$

$r_{n-4} = r_{n-3} q_{n-2} + r_{n-2} \Rightarrow r_{n-2} = r_{n-4} - r_{n-3} q_{n-2}$

$\Rightarrow r_n = ma + nb$

Örnek // -118 ve 26 sayılarının OBEB'ini bulunuz ve OBEB'i bu sayıların öklid algoritmalarını bulun.

$OBEB(-118,26) = r_n \quad r_n = m(-118) + n(26)$

$OBEB(-118,26) = OBEB(118,26)$

1- I - $118 = 26 \cdot 4 + 14 \wedge 0 < 14 < 26$

II - $26 = 14 \cdot 1 + 12 \wedge 0 < 12 < 14$

III - $14 = 12 \cdot 1 + 2 \wedge 0 < 2 < 12$

IV - $12 = 2 \cdot 6 + 0 \qquad OBEB(-118,26) = 2 = r_n$

2 − $2 = 14 - 12 \Rightarrow 2 = 14 - (26 - 14)$

$12 = 26 - 14 \Rightarrow 2 = 14 - 26 + 14$

$\Rightarrow \boxed{2 = 2.14 - 26}$

$14 = 118 - 26.4$

$2 = 2.(118 - 26.4) - 26$

$2 = 2.118 - 8.26 - 26$

$2 = 2.118 - 9.26$

$2 = m(-118) + n(26) \qquad 2 = (-2)(-118) + (-9)(26) \quad m = -2 \quad n = -9$

Sonuçlar: $\{OB(a,b)\} = \{B(rn)\} \Rightarrow \forall x \in \{OB(a,b)\} \Rightarrow (x/a,\ x/b)$

$\Rightarrow x \in \{B(rn)\} \Rightarrow x/rn$

Bir d sayısının a ve b nin OBEB'i olduğunu göstermek için,

1° $d/a \wedge d/b$

2° $\exists c \in \mathbb{Z}$ için $c/a \wedge c/b \Rightarrow c/d$

Örnek // 5517 ve 2421 sayılarının OBEB ini bulun ve bu sayıların lineer toplamı olarak yazın.

$5517 = 2421.2 + 675$

$2421 = 675.3 + 396$

$675 = 396.1 + 279$

$396 = 279.1 + 117$

$279 = 117.2 + 45$

$117 = 45.2 + 27$

$45 = 27.1 + 18$

$27 = 18.1 + 9$

$18 = 9.2 + 0$

$OBEB(5517, 2421) = 9$

$9 = m(5517) + n(2421) \qquad m = ? \quad n = ?$

en sondan en başa

$9 = \underbrace{(-104)}_{m}(5517 + \underbrace{(133)}_{n}(2421)$

Teorem: En az biri sıfırdan farklı iki tamsayı a ve b olsun.

$OBEB(a,b) = OBEB(b,a)$

İspat// $\{OB(a,b)\} = \{B(a)\} \cap \{B(b)\} = \{B(b)\} \cap \{B(a)\} = \{OB(b,a)\}$

$\Rightarrow OBEB(a,b) = OBEB(b,a)$

Teorem: En az biri sıfırdan farklı iki tamsayı a ve b olsun. $m \in \mathbb{Z}^+$ ise

$OBEB(ma, mb) = m\, OBEB(a,b)$

İspat// $a > b \Rightarrow a = bq + r \wedge 0 < r < |b|$

$ma = (mb)q + mr \wedge 0 < mr < |mb|$

$b = rq_1 + r_1 \wedge 0 < r_1 < r$

$r = r_1 q_2 + r_2 \wedge 0 < r_2 < r_1$

- - - - - - - - - - - -

$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \wedge 0 < r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0 \qquad OBEB(a,b) = r_n$

$mb = (mr)q + mr_1 \wedge 0 < mr_1 < mr$

$mr = (mr_1) q_2 + mr_2 \wedge 0 < mr_2 < mr_1$

- - - - - - - - - - - -

$mr_{n-2} = (mr_{n-1}) q_n + mr_n \wedge 0 < mr_n < mr_{n-1}$

$mr_{n-1} = (mr_n) q_{n+1} + 0 \qquad OBEB(ma, mb) = m r_n = m\, OBEB(a,b)$

Sonuçlar:

1- $OBEB(a,b) = 1$ ise $OBEB(ma, mb) = m$

2- $b/a \Rightarrow OBEB(a,b) = |b|$

3- $a \neq 0 \Rightarrow OBEB(a,a) = |a|$

4- $OBEB(a,1) = 1$

Teorem: En az biri sıfırdan farklı iki tamsayı a ve b olsun. $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, m/a ve m/b ise $OBEB(a:m, b:m) = [OBEB(a,b)] : m$

İspat// m/a ve m/b olduğundan $(a:m)m = a \wedge [(b:m)m] = b$

$\Rightarrow OBEB[(a:m)m, (b:m)m] = m\, OBEB[(a:m), (b:m)] = OBEB(a,b)$

$\Rightarrow OBEB[(a:m), (b:m)] = [OBEB(a,b)] : m$

Sonuç: $OBEB(a,b)=d$ ise $OBEB[(a:d),(b:d)]=1$

ispat// $OBEB(a,b)=1 \Rightarrow$

$(a:d)=u \wedge (b:d)=v \Rightarrow a=du \wedge b=dv$

$OBEB(a:d, b:d)=k \Rightarrow OBEB(u,v)=k \Rightarrow \exists m,n \in Z, u=km \wedge v=kn$

$\Rightarrow a=dkm \wedge b=dkn \Rightarrow a=(dk)m \wedge b=(dk)n$

$\Rightarrow (dk)/m \wedge (dk)/n \Rightarrow dk \in \{OB(a,b)\}$

$\Rightarrow dk \in \{OB(a,b)\} \wedge OBEB(a,b)=d$

$\Rightarrow dk/d \Rightarrow k=1 \Rightarrow OBEB(u,v)=OBEB(a:d, b:d)=1$ //

Tanım: En az biri sıfırdan farklı $a_1, a_2, \dots, a_n$ tamsayıları verilsin. Bu sayıların ortak bölenleri kümesinin en büyük elemanına ortak bölenlerinin en büyüğü denir. Ve sembolik olarak $OBEB(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ ile gösterilir.

Teorem: En az biri sıfırdan farklı $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ tamsayıları verilsin.

$OBEB(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = OBEB[OBEB(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) a_n]$ dir.

$n=3 \Rightarrow OBEB(a_1, a_2, a_3) = OBEB[OBEB(a_1, a_2), a_3]$

ispat// $OBEB(a_1, a_2, \dots, a_n)=d_1$ ve $OBEB[OBEB(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n]=d_2$ olsun.

1° $OBEB(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)=d_1$ olsun. $i=1,2,\dots,n$ için

$\Rightarrow d_1/a_i \Rightarrow i=1,2,\dots,n-1$ için $d_1/a_i \wedge d_1/a_n \Rightarrow d_1/d_2$

2° $OBEB[OBEB(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n]=d_2$ olsun.

$\Rightarrow [d_2/OBEB(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \wedge d_2/a_n]$ $i=1,2,\dots,n-1$ için $d_2/a_i \wedge d_2 : a_n$

$\Rightarrow i=1,2,\dots,n$ için d_2/a_i

$\Rightarrow d_2/d_1 \Rightarrow (d_1/d_2 \wedge d_2/d_1) \Rightarrow d_1=d_2$

Teorem: En az biri sıfırdan farklı $a_1, a_2, \dots, a_n$ sayılarının OBEB'i bu sayıların lineer toplamı olarak yazılabilir.

Yani $OBEB(a_1, a_2, \dots, a_n)=d$ ise $d=a_1t_1+a_2t_2+\dots+a_nt_n$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in Z$

Tanım: (Aralarında Asal veya Rölatif Asal Sayılar):

En az biri sıfırdan farklı a,b tamsayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü 1 ise (OBEB=1) a ve b sayıları aralarında (relatif) asaldırlar.

Örnek// OBEB(16,15)=1 olduğundan 15 ve 16 aralarında asaldır.

Eğer a ve b aralarında asal ise (OBEB(a,b)=1) bu durum,

$(a,b)=1$ şeklinde sembolik olarak gösterilir.

Örnek// $(16,-15)=1$

Teorem: En az biri sıfırdan farklı a ve b tamsayılarının relatif asal olması için gerek ve yeter şart $1=ma+nb$ olacak şekilde $m,n\in\mathbb{Z}$ sayılarının bulunmasıdır.

İspat// 1- Gerek şart: $\Rightarrow (a,b)=1$ (a ve b aralarında relatif asal ise)

$\Rightarrow OBEB(a,b)=1$

$\Rightarrow \exists\, m,n\in\mathbb{Z},\ 1=ma+nb$

2- Yeter şart $\Leftarrow$: $1=ma+nb$ $m,n\in\mathbb{Z}$ OBEB(a,b)=d olsun.

$\Rightarrow \exists\, k,t\in\mathbb{Z},\ a=kd \wedge b=td$

$\Rightarrow (d/a \wedge d/b)$

$\Rightarrow 1=mkd+ntd$

$\Rightarrow (mk+nt)d=1$

$\Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$ OBEB(a,b)=1 $\Rightarrow (a,b)=1$

$(a,b)=1 \Leftrightarrow 1=ma+nb$ $m,n\in\mathbb{Z}$

Teorem: $a,b,c\in\mathbb{Z}$ olsun. $(a,c)=1 \wedge (b,c)=1 \Rightarrow (ab,c)=1$

İspat// $(a,c)=1 \wedge (b,c)=1 \Rightarrow (\exists\, m,n\in\mathbb{Z},\ 1=ma+nc) \wedge (\exists\, u,v\in\mathbb{Z},\ 1=ub+vc)$

$\Rightarrow 1=(ma+nc)(ub+vc)$

$\Rightarrow 1=maub+mavc+ncub+vnc^2$

$\Rightarrow 1=\underbrace{(mu)}_{k}(ab)+\underbrace{(mav+nub+nvc)}_{r}c$

$\Rightarrow 1=k(ab)+r.c$ $k,r\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow (ab,c)=1$

Teorem: $a,b,c \in \mathbb{Z}$ olsun. $a/bc \wedge (a,b)=1 \Rightarrow a/c$

İspat// $(a,b)=1 \Rightarrow \exists\, m,n \in \mathbb{Z},\ 1=ma+nb$

$\Rightarrow c = mac + nbc$

$a/bc \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ bc = ka$

$\Rightarrow c = mac + nka$

$\Rightarrow c = (mc+nk)a \Rightarrow a/c$

Teorem: $a,b,n \in \mathbb{Z}$ olsun. $[a/n \wedge b/n \wedge (a,b)=1] \Rightarrow ab/n$

İspat// $a/n \wedge b/n \wedge (a,b)=1 \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z},\ n=ax \wedge b/n \wedge (a,b)=1$

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z},\ n=ax \wedge \exists\, y \in \mathbb{Z},\ n=by \wedge (a,b)=1$

$\Rightarrow ax=by \wedge (a,b)=1$

$\Rightarrow$ $b/ax \wedge (a,b)=1 \Rightarrow b/x$

$\Rightarrow$ $a/by \wedge (a,b)=1 \Rightarrow a/y$

$\Rightarrow b/x \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{Z},\ x=br \Rightarrow n=ax=abr \Rightarrow n=(ab)r \Rightarrow ab/n$

Tanım: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tamsayılarının OBEB'i 1 ise bu sayılara aralarında asaldırlar (relatiftirler) denir.

Örnek// $OBEB(15,20,22) = OBEB[OBEB(15,20),22] = OBEB(5,22) = 1$

$OBEB(5,8,11) = 1$

Teorem: $i=1,2,\ldots,n$ için $a, b_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ve $(a,b_i)=1$ ise $(a, \prod_{i=1}^{n} b_i)=1$

İspat// İndüksiyon (tümevarım) metodu ile yapılacak.

$(a, \prod_{i=1}^{n} b_i)=1$ önermesini doğrulayan i sayılarının kümesi D olsun.

1° $n=1$ için $a, b_1 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \wedge (a,b_1)=1 \Rightarrow (a,b_1) = (a\prod_{i=1}^{1} b_i)=1 \Rightarrow 1 \in D$

2° $n=k \in D$ olsun. $i=1,2,\ldots,k$ için $a, b_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \wedge (a,b_i)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a\prod_{i=1}^{k} b_i)=1$ olsun

3° $n=k+1$ için $i=1,2,\ldots,k,k+1$ için $a, b_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \wedge (a,b_i)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, \prod_{i=1}^{k+1} b_i) = [a, (\prod_{i=1}^{k} b_i) b_{k+1}] \Rightarrow [(a,b_{k+1})=1 \wedge (a, \prod_{i=1}^{k} b_i)=1]$

$\Rightarrow [a, (\prod_{i=1}^{k} b_i)\, b_{k+1}]=1 \Rightarrow (a, \prod_{i=1}^{k+1} b_i)=1,\ k+1 \in D$

Problemler :

1- 1062 ve 425 sayılarının aralarında asal olduklarını gösterin.

2- OBEB(16,24,20) = ?

3- OBEB(108, -64) = d ve d = 108x - 64y ise d = ? x = ? y = ? d, x, y ∈ Z

4- Üç arsanın alanları 1260 m², 1760 m², 2772 m² dir. Bu arsalar olabildiğince büyük alanda eşit parçalara bölünerek parsellenmiştir. Bir parselin alanı kaç m² dir ve herbir arsa kaç parseldir?

5- a, b ∈ Z ve (a,b) = 1 ise (a+1, ab) = 1 olduğunu ispat edin.

6- İki sayının OBEB'ini bulmak için yapılan işlemler sonucunda sırasıyla 8, 2, 7 bölümleri elde ediliyor. Bu sayıların OBEB'i 12 ise sayıları bulun.

7- A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} veriliyor. ∀ x, y ∈ A, x∘y = OBEB(x,y) olan bir işlem tanımlanıyor. o işleminin çizelgesini (tablo) düzenleyerek, özelliklerini inceleyin.

8- OBEB(a,b,c) = d ise d^2/ab, d^2/ac, d^2/bc önermelerinin doğruluk değeri?

9- a ∈ Z^+ olsun. (a, a+1) = 1, (a, 2a+1) = 1, (a+1, 2a+1) = 1 " " " ?

10- n, a, b ∈ Z^+ olsun. (a,b) = 1 ise $(a^n, b) = 1$ olduğunu ispat edin?

11- a, n, b ∈ Z^+ olsun. OBEB(a,b) = d ⇒ OBEB$(a^n, b^n) = d^n$ olduğunu göst.

12- b/c ∧ (a,c) = 1 ise (a,b) = 1 olduğunu ispat edin?

Çözümler :

1- 1062 = 425.2 + 212 OBEB(1062, 425) = 1

425 = 212.2 + 1

212 = 1.212 + 0

2- OBEB(16,24,20) = [OBEB(16,24), 20] = OBEB[OBEB(16,24), 20]

= OBEB(8, 20) = 4

4- OBEB(1260, 1760, 1772)

OBEB(1260, 1760) = 20 OBEB(20, 2772) = 4m² 1260 : 4 = 315 parsel

1760 = 1260.1 + 500 2772 = 20.138 + 12 1760 : 4 = 440 "

1260 = 500.2 + 260 20 = 12.1 + 8

500 = 260.1 + 240 12 = 8.1 + 4 2772 : 4 = 695 "

260 = 240.1 + 20 8 = 4.2 + 0

240 = 20.12 + 0

6- $a = b.8 + r_1 \quad b = r_1.2 + r_2 \quad r_1 = r_2.7 + r_3 \wedge r_3 = 0$

$OBEB(a,b) = 12 = r_2 \quad r_1 = r_2.7 = 84$

$b = 2.84 + 12 = 180$ // $\quad a = 180.8 + 84 = 1524$ //

7-

o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12

$x o y = OBEB(x,y)$

$\forall x \in A, \nexists e \in A \quad x o e = e o x$

birim yok
kapalılık var
birleşme var
ters eleman yok
değişme var.

8- $OBEB(a,b,c) = d$ ise d^2 / ab ?

$OBEB(a,b,c) = d \Rightarrow (d/a \wedge d/b \wedge d/c)$

$\Rightarrow \exists k,r,t \in Z, (a = kd \wedge b = rd \wedge c = td)$

$\Rightarrow ab = (kd)(rd) = krd^2 \Rightarrow ab = (kr)d^2$

$\Rightarrow d^2 / ab$

9- $a \in Z^+ \quad (a, a+1) = 1$

$a + 1 = a.1 + 1$

$a = 1.a + 0 \quad OBEB(a+1, a) = 1 \Rightarrow (a+1, a) = 1$

Bir Tamsayının Katları

Tanım: $a \in Z \setminus \{0\}$ ve $n \in Z$ olmak üzere na tamsayısına a'nın n katı denir.

a'nın tüm katlarının kümesi $\{K(a)\}$ ile gösterilecektir.

$\{K(a)\} = \{\ldots, -na, \ldots, -2a, -a, 0, a, 2a, \ldots, na, \ldots\}$

Örnek// 2, 3 ve −3 sayılarının katları kümesinin bazı elemanlarını yazalım.

$\{K(2)\} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$

$\{K(3)\} = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\} \qquad \{K(3)\} = \{K(-3)\}$

$\{K(-3)\} = \{\ldots, 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, \ldots\}$

Sonuç// $\{K(a)\} = \{K(-a)\}$

6- $a = b.8 + r_1 \quad b = r_1.2 + r_2 \quad r_1 = r_2.7 + r_3 \wedge r_3 = 0$

$OBEB(a,b) = 12 = r_2 \quad r_1 = r_2.7 = 84$

$b = 2.84 + 12 = 180$ // $\quad a = 180.8 + 84 = 1524$ //

7-

o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12

$x o y = OBEB(x,y)$

$\forall x \in A, \exists e \in A \quad x o e = e o x$

birim yok
kapalılık var
birleşme var
ters eleman yok
değişme var.

8- $OBEB(a,b,c) = d$ ise d^2 / ab ?

$OBEB(a,b,c) = d \Rightarrow (d/a \wedge d/b \wedge d/c)$

$\Rightarrow \exists k,r,t \in Z, (a = kd \wedge b = rd \wedge c = td)$

$\Rightarrow ab = (kd)(rd) = krd^2 \Rightarrow ab = (kr)d^2$

$\Rightarrow d^2 / ab$

9- $a \in Z^+ \quad (a, a+1) = 1$

$a + 1 = a.1 + 1$

$a = 1.a + 0 \quad OBEB(a+1, a) = 1 \Rightarrow (a+1, a) = 1$

Bir Tamsayının Katları

Tanım: $a \in Z \setminus \{0\}$ ve $n \in Z$ olmak üzere na tamsayısına a'nın n katı denir.

a'nın tüm katlarının kümesi $\{K(a)\}$ ile gösterilecektir.

$\{K(a)\} = \{..., -na, ..., -2a, -a, 0, a, 2a, ..., na, ...\}$

Örnek// 2, 3 ve −3 sayılarının katları kümesinin bazı elemanlarını yazalım.

$\{K(2)\} = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

$\{K(3)\} = \{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\} \qquad \{K(3)\} = \{K(-3)\}$

$\{K(-3)\} = \{..., 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, ...\}$

Sonuç// $\{K(a)\} = \{K(-a)\}$

Tanım: (Tamsayıların Ortak Katları):

Her ikisi de sıfırdan farklı iki a ve b tamsayılarının her ikisinin de katı olan tamsayıya bu iki sayının bir ortak katı denir. a ve b tamsayılarının ortak katlarının kümesi $\{OK(a,b)\}$ ile gösterilir.

$$\{OK(a,b)\} = \{x : x \text{ a nın bir katıdır ve } x \text{ b nin bir katıdır.}\}$$
$$= \{x : x \in \{K(a)\} \wedge x \in \{K(b)\}\} = \{K(a)\} \cap \{K(b)\}$$

Örnek// -2 ve 3 sayılarının $OK = ?$

$$\{OK(-2,3)\} = \{K(-2)\} \cap \{K(3)\}$$
$$= \{\ldots,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\} \cap \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$$
$$= \{\ldots,-12,-6,0,6,12,\ldots\}$$

Teorem: $a,b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olsun. $OBEB(a,b) = d$ ise $\{OK(a,b)\} = \{K[(a,b):d]\}$

İspat// $1^\circ-$ $x \in \{OK(a,b)\} \Rightarrow (a/x \wedge b/x)$ O.K. tanımı. bölünebilme öz.

$$\Rightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z},\ x = ma \wedge x = nb$$
$$\Rightarrow ma = nb$$

$$OBEB(a,b) = d \Rightarrow (d/a \wedge d/b)$$
$$\Rightarrow \exists r,s \in \mathbb{Z},\ a = rd \wedge b = sd \wedge (r,s) = 1$$

$$a = mrd = b = nsd \wedge (r,s) = 1$$
$$mr = ns \wedge (r,s) = 1 \Rightarrow (r/ns \wedge (r,s)=1) \vee (s/mr \wedge (r,s)=1)$$
$$\Rightarrow r/n \vee s/m$$
$$\exists t \in \mathbb{Z},\ m = st$$

$$x = ma = mrd = nb = nsd \qquad b:d = s \qquad r = a:d$$
$$x = (a:d)\,st\,d = (a:d)\,b \cdot t = [(ab):d]\,t \Rightarrow x \in \{K[(ab):d]\}$$
$$\Rightarrow \{OK(a,b)\} \subseteq \{K[(ab):d]\}$$

$2^\circ-$ $y \in \{K[(ab):d]\} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ y = k[(ab):d] = a(\overset{n}{b:d})k = b(\overset{m}{a:d})k$

$$\Rightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z},\ y = a(nk) = b(mk)$$
$$\Rightarrow y \in \{OK(a,b)\}$$
$$\Rightarrow \{K[(ab):d]\} \subseteq \{OK(a,b)\}$$
$$\Rightarrow \{OK(a,b)\} = \{K[(a,b):d]\}$$

ispat// $\{OK(\underset{a}{-18},\underset{b}{24})\} = \{K[(ab):d]\} = \{K(-72)\}$

$OBEB(-18,24) = 6 \quad [(ab):d] = \frac{-18 \cdot 24}{6} = -72$ //

Tanım: Herbiri sıfırdan farklı $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tamsayıları verildiğinde bu sayıların herbirinin katı olan tamsayıya bu sayıların ortak katı denir ve sembolik olarak bu sayıların ortak katları kümesi

$\{OK(a_1, a_2, \ldots, a_n)\}$ gösterilir.

Teorem: Sıfırdan farklı a,b tamsayılarının pozitif ortak katlarının kümesinin bir en küçük elemanı vardır.

ispat// $|a.b|$ a ve b nin bir ortak katıdır (pozitif).

a ve b nin pozitif ortak katlarının kümesi, doğal sayılar kümesinin bir alt kümesidir.

Tanım: Sıfırdan farklı a,b tamsayılarının pozitif ortak katları kümesinin en küçük elemanına bu sayıların ortak katlarının en küçüğü denir. Sembolik olarak $OKEK(a,b)$ ile gösterilir.

Sonuç// $OKEK(a,b) = OKEK(a,-b) = OKEK(-a,b) = OKEK(-a,-b)$

Teorem: a,b sıfırdan farklı iki tamsayı olsun. $OKEK(a,b) = k$ ise

$\{OK(a,b)\} = \{K(k)\}$

ispat// 1- $\forall x \in \{K(k)\} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Z},\ x = kr$

Ayrıca hipotezden, $OKEK(a,b) = k \Rightarrow (a/k \wedge b/k)$

$\Rightarrow \exists p,q \in \mathbb{Z},\ k = pa \wedge k = qa$

$\Rightarrow \exists r,p,q \in \mathbb{Z},\ x = kr \wedge k = pa \wedge k = qb$

$\Rightarrow x = kr = par \wedge x = kr = qbr$

$\Rightarrow x = a(pr) \wedge x = b(qr)$

$\Rightarrow x \in \{OK(a,b)\}$

$\Rightarrow \{K(k)\} \subseteq \{OK(a,b)\}$

2- $\forall x \in \{OK(a,b)\} \overset{?}{\Rightarrow} x \in \{K(k)\} \overset{?}{\Rightarrow} k/x$

Aksini farzedelim: $k \not| x \wedge x \in \{OK(a,b)\} \wedge OKEK(a,b) = k$

$\Rightarrow x = kq + r \wedge 0 \leq r < k \Rightarrow (a/x \wedge b/x) \wedge (a/k \wedge b/k) \wedge r = x - kq$

$\Rightarrow (a/r \wedge b/r) \wedge 0 \leq r < k$

$\Rightarrow r \in \{OK(a,b)\} \wedge 0 \leq r < k$

Kabulümüz yanlıştır. $r = 0$ dır. Yani k/x tir. (x, k'nın bir katıdır.)

$x \in \{K(k)\} \Rightarrow \{OK(a,b)\} \subseteq \{K(k)\}$

$\Rightarrow \{OK(a,b)\} = \{K(k)\}$

Teorem// Pozitif bir k tamsayısının iki a,b tamsayılarının OKEK'i olması için gerek ve yeter şart, $(k:a)$ ve $(k:b)$ tamsayılarının aralarında asal olmasıdır.

$$\boxed{OKEK(a,b) = k \Leftrightarrow [(k:a),(k:b)] = 1}$$

İspat// 1° $\Rightarrow$: $OKEK(a,b) = k \Rightarrow \exists p,q \in \mathbb{Z},\ k = pa \wedge k = qb$

Ayrıca: $OBEB[(k:a),(k:b)] = OBEB(p,q) = d$

$\Rightarrow \exists r,s \in \mathbb{Z},\ p = rd \wedge q = sd \wedge (r,s) = 1$

$\Rightarrow k = pa = a(rd) \wedge k = qb = b(sd)$

$\Rightarrow k = (ar)d \wedge k = (bs)d$

$\Rightarrow [(k:d) = ar \wedge (k:d) = bs]$

$\Rightarrow (k:d)$ a ve b nin bir ortak katıdır.

$\Rightarrow (k:d) \in \{OK(a,b)\} \wedge OKEK(a,b) = k$

$\Rightarrow k \leq (k:d) \Rightarrow d = 1$ olmalıdır.

$\Rightarrow OBEB[(k:a),(k:b)] = 1$

$\Rightarrow [(k:a),(k:b)] = 1$

Benzer şekilde yeter şart ispatlanabilir. Sonuç olarak,

$$OKEK(a,b) = 1 \Leftrightarrow [(k:a),(k:b)] = 1$$

Teorem// Her ikisi de sıfırdan farklı a,b tamsayıları için

$$\boxed{OKEK(a,b) \cdot OBEB(a,b) = |ab|}$$

İspat// $OBEB(a,b) = d \Rightarrow \exists u,v \in \mathbb{Z},\ a = ud \wedge b = vd \wedge (u,v) = 1$

$\Rightarrow (av = uvd \wedge bu = uvd)$

$\Rightarrow [\underbrace{(uvd)}_{k} : a], [\underbrace{(uvd)}_{k} : b] = (v,u) = 1$

$\Rightarrow$ OKEK$(a,b) = k = |uvd|$

$\Rightarrow |ab| = |ud.vd| = |uvd.d| = |uvd|.d$

$\Rightarrow |ab| =$ OKEK(a,b). OBEB(a,b)

Sonuçlar :

1 - $(a,b)=1$ ise OBEB$(a,b)=1 \Rightarrow |ab| =$ OKEK(a,b)

2 - $m \in \mathbb{Z}$, OKEK$(ma, mb) = ?$

$|ma.mb| =$ OKEK(ma,mb) . OBEB(ma, mb)

$|ab| =$ OKEK(a,b). OBEB(a,b)

$|m|^2|ab| =$ OKEK(ma,mb)

OBEB$(ma,mb) =$ OBEB$(|ma|,|mb|)$

$=$ OBEB$(|m||a|, |m||b|)$

$= |m|$ OBEB$(|a|,|b|)$

$= |m|$ OBEB(a,b)

$|m|^2|ab| =$ OKEK$(ma,mb) = |m|$ OBEB(a,b)

$\Rightarrow |m||ab| =$ OKEK$(ma,mb) =$ OBEB(a,b)

$\Rightarrow |m|$ OKEK(a,b) OBEB$(a,b) =$ OKEK(ma,mb) OBEB(a,b)

$\Rightarrow$ OKEK$(ma,mb) = |m|$ OKEK(a,b)

3 - a/b ise OKEK$(a,b) = |b|$

4 - OKEK$(a,a) = |a|$

5 - OKEK$(a,1) = |a|$

Tanım : Sıfırdan farklı $a_1, a_2, \dots, a_n$ sayılarının pozitif ortak katları kümesinin en küçük elemanına bu sayıların OKEK'i denir. Ve

OKEK$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ile gösterilir.

Teorem: Herbiri sıfırdan farklı $a_1, a_2, \dots, a_n$ tam sayıları verilsin.

OKEK$(a_1, a_2, \dots, a_n) =$ OKEK$[$OKEK$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n]$

Problemler :

1 - 118 ve -26 sayılarının OKEK'ini bulun ?

2 - 6, 8, 9, 12 sayılarının herbiriyle bölündüğünde 4 kalanını veren en küçük pozitif tamsayıyı bulun?

3 - 3,11,13 sayılarının 1000000 dan küçük kaç tane ortak katı vardır?

4 - Bir fıçıda tahmini olarak 23 ile 65 lt arasında sirke vardır. Bu sirkeyi 2lt'lik, 3 lt lik ve 4 lt'lik kaplara tamamen boşaltmak mümkün olduğuna göre, fıçıda en az ve en çok kaç lt sirke olabilir?

5 - 12 ve 18 ile bölünen 20 ile 100 arasındaki sayıların kümesi nedir?

6 - $a \in Z^+$ ise $OKEK(a, 2a+1) = ?$

7 - $OKEK(24, 18, 52) = ?$

8 - $a, b \in Z^+$ olsun. $ab = 51840$ ve $OKEK(a,b) = 2160$ olacak şekilde $a = ?$ $b = ?$

Çözümler:

1 - $OKEK(118, -26) = ?$

$OKEK(a,b) \cdot OBEB(a,b) = |ab|$

$OBEB(118, -26) = OBEB(118, 26) = 2$

$OKEK(118, -26) \cdot 2 = |118 \cdot (-26)|$

$\Rightarrow OKEK(118, -26) = 118 \cdot 13$ //

2 - $OKEK(6,8,9,12) = OKEK[(6,8,9),12]$

$\Rightarrow OKEK(OKEK(6,8),9) =$

$\Rightarrow OKEK(24,9) = 72$ $\quad OKEK(24,9) \cdot OBEB(24,9) = 24 \cdot 9$

$24 = 9 \cdot 2 + 6$
$9 = 6 \cdot 1 + 3$
$6 = 3 \cdot 2 + 0$
$OKEK(24,9) = 72$

$\Rightarrow OKEK(72,12) = 72$

$OKEK(6,8) \cdot OBEB(6,8) = 6 \cdot 8$
$8 = 6 \cdot 1 + 2$
$6 = 2 \cdot 3 + 0$
$OBEB(6,8) = 2$
$OKEK(6,8) \cdot 2 = 48 \Rightarrow OKEK(6,8) = 24$

$72 + 4 = 76$ //

3 - $OKEK(3,11,13) = 3 \cdot 11 \cdot 13 = 33 \cdot 13 = 429$

$\{OK(a,b)\} = \{K(k)\}$ $\quad 1.000.000 : 429 = 2333 + 1 \rightarrow$ kalan

4 - $OKEK(2,3,4) = 12$

$\{OK(2,3,4)\} = \{K(12)\} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72 \ldots\}$

$24 \leq x \leq 60$ en az 24 lt, en çok 60 lt.

6 - $a \in Z^+$ $\quad OKEK(a, 2a+1) = a(2a+1)$ $\quad (a, 2a+1) = 1 \Rightarrow OKEK(a, 2a+1) = 2a^2 + a$ //

8 - $OKEK(a,b) \cdot OBEB(a,b) = |ab|$

$2160 \cdot OBEB(a,b) = 51840$ $\quad OBEB(a,b) = 24$

$OBEB(a,b)=d \Rightarrow (d/a \wedge d/b)$

$\Rightarrow \exists u,v \in Z,\ a=ud \wedge b=vd \wedge (u,v)=1$

$\Rightarrow ab=(uvd).d$

$ab=uv.d^2$

$51840=u.v(24)^2 \Rightarrow u.v=90 \wedge (u,v)=1$

u	v	a = ud	b = vd			
1	90	1.24	24.90	a=24	b=24.90=2164	... 1
2	45	2.24	24.45	a=48	b=980	... 2
5	18	5.24	24.18	a=120	b=...	... 3
9	10	9.24	24.10	a=216	b=240	... 4

- Asal Sayılar -

Tanım: $-1,0,1$ den farklı bir p tamsayısının $-p,-1,1$ ve p den başka böleni yoksa bu sayıya asal sayı denir. Asal olmayan ve $-1,0,1$ den farklı olan tamsayıya bileşik sayı denir.

Örnek// $2,-3,5,-11,41,-97,8191$ asal sayılardır.

Teorem: p bir asal sayı ve q herhangi bir tamsayı olsun.

$p/q \vee (p,q)=1$ önermesi doğrudur.

İspat// p asal $\Rightarrow OBEB(p,q)=1 \vee OBEB(p,q)=|p|$

$\Rightarrow (p,q)=1 \vee p/q$

Teorem: $a,b \in Z^+$ ve p asal olsun.

$p/ab \Rightarrow (p/a \vee p/b)$

İspat// 1° Eğer p/a ise teorem doğrudur.

2° $p \not/ a$ ise $\Rightarrow [(p,a)=1 \wedge p/ab] \Rightarrow p/b$

Teorem: $a_1,a_2,\dots,a_n$ tamsayılar ve p bir asal sayı olsun. $n \in N$ olmak üzere

$p/\prod_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow \exists a_i,\ p/a_i$

İspat// Tümevarımla yapılacak,

1° $n=1$, $p/\prod_{i=1}^{1} a_i = p/a_1$

2° $n=k$ için önerme doğru olsun.

$p/\prod_{i=1}^{k} a_i \Rightarrow \exists a_i,\ p/a_i$ olsun.

3° $n=k+1$, $p/\prod_{i=1}^{k+1} a_i \Rightarrow p/(\prod_{i=1}^{k} a_i)\cdot a_{k+1} \Rightarrow p/(\prod_{i=1}^{k} a_i) \vee p/a_{k+1}$

$\Rightarrow (\exists a_i, p/a_i) \vee p/a_{k+1} \Rightarrow \exists a_i, p/a_i$

Teorem: (Aritmatiğin Temel Teoremi):

1'den büyük her tamsayı ya asaldır, ya da bu tamsayı, sıra önemli olmamak üzere asal sayıların çarpımı olarak tek türlü yazılır.

İspat// 1°) Varlığın ispatı: Tümevarımla yapılacak.

Teoremin şartlarını sağlayan tamsayıların kümesi D olsun.

1°) 2, 1'den büyük en küçük tamsayı $\Rightarrow 2 \in D$

2°) $2 \leq k < a$ olmak üzere $k \in D$ olsun.

3°) $k+1 = a$ için $\rightarrow$ a asal ise $a \in D$

$\rightarrow$ a asal değilse $a = uv$, $u, v \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (u < a \wedge v < a) \Rightarrow$ $\rightarrow$ u, v asal ise $u, v \in D$

$\rightarrow$ u, v asal değilse

$\Rightarrow u = p_1.p_2 \ldots p_r \wedge v = q_1.q_2 \ldots q_r$ asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir.

$\Rightarrow a = uv = p_1.p_2 \ldots p_r.q_1.q_2 \ldots q_r \Rightarrow a \in D$

2°) Tekliğin İspatı: Aksini farzedelim. a tamsayısı asal sayıların çarpımı olarak iki türlü yazıldığını farzedelim.

$a = p_1.p_2 \ldots p_n \quad a = q_1.q_2 \ldots q_r$

$\Rightarrow p_1.p_2 \ldots p_n = q_1.q_2 \ldots q_r \Rightarrow p_1/q_1.q_2 \ldots q_r$

$\Rightarrow \exists q_i (i = 1, 2, \ldots, n) \quad n/q_i$

$\Rightarrow p_1 = q_i \wedge p_2 = q_j \wedge \ldots \wedge p_n = q_k$

Sonuç// 1°) $a = p_1.p_2 \ldots p_n$

b sayısı için α tane çarpan p'ye eşit

β tane " q'ya eşit

— — — — — — — — —

λ " " t'ye eşit olsun.

$b = p^{\alpha}.q^{\beta} \ldots t^{\lambda}$: b'nin asal çarpanlara ayrılış biçimi.

2°) 1'den büyük her tamsayının en az bir asal böleni vardır.

3°) p asal sayısı bir a tamsayısının bir kuvvetini bölerse, a'yı da böler.

$p/a^n \Rightarrow p/a$

$p/(a.a \ldots a) \Rightarrow p/a$

Teorem: Pozitif bir tamsayının 1'den farklı bölenlerinin en küçüğü asal sayıdır.

İspat// a pozitif bir sayı olsun. a asal ise $\{1,a\}$ pozitif bölenleri kümesidir. 1'den farklı olanı a'dır ve asaldır.

a asal değilse $1<p<q<\dots<a$

p asal ise teorem doğrudur.

p asal değilse $1<p<p$ teorem doğrudur.

Teorem: Pozitif bir a bileşik sayısı verilsin. $k^2 \leq a$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı k olsun. a'nın k'ya eşit veya k'dan küçük olan en az bir asal böleni vardır.

İspat// a'nın en az bir asal böleni vardır. Asal bölenlerin en küçüğü p olsun.

$\Rightarrow a = p a_1$ şeklinde yazılabilir. $\Rightarrow p < a_1$

Ayrıca $p \overset{?}{\leq} k$ kabul edelim ki, $k<p$ olsun.

$\Rightarrow (k<p \wedge p<a_1) \Rightarrow (k<p \wedge k<a_1) \Rightarrow (k+1 \leq p \wedge k+1 \leq a_1)$

$\Rightarrow (k+1)^2 \leq p a_1 \Rightarrow (k+1)^2 \leq a$ kabulümüz $k<p$ yanlıştır. $\Rightarrow p \leq k$ dır.

Sonuç// a asal mıdır? $k^2 \leq a < (k+1)^2$ veya $k^2 < a \leq (k+1)^2$ olacak şekilde pozitif k tamsayısı bulunur. k ya eşit veya küçük olan asal sayılar içinde a'yı böleni varsa a bileşik sayı, yoksa a asal

Örnek// 359 sayısının asal olup olmadığını araştırın.

$\underline{359} \Rightarrow 18^2 \leq 359 < 19^2 \qquad k=18$

$\{2,3,5,7,11,13,17\}$ 359 asal sayıdır.

Örnek// $\underline{371} \Rightarrow 19^2 \leq 371 < 20^2 \qquad \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ 7 ile bölünür. asal değil.

Teorem: Pozitif asal sayıların kümesi sonsuz ve sayılabilir bir kümedir.

I – Pozitif asal sayılar kümesi, sonsuzdur? Aksini farzedelim. Yani pozitif asal sayılar kümesi, sonlu olsun. $\{2,3,5,7,\dots,p\}=A$ olsun.

$a=(2.3.5.7.\dots.p)+1$ alalım.

a sayısı A nın elemanları ile bölündüğünde 1 kalanını verir. $a \notin A$

a asal $\Rightarrow$ A kümesi için tanım yanlıştır.

a asal değil $\Rightarrow$ a nın en az bir asal böleni vardır.

$\Rightarrow$ A'nın tanımı yanlıştır $\Rightarrow$ A kümesi sonsuzdur.

II- Pozitif asal sayıların kümesi sayılabilir ve sonsuzdur.

Problemler:

1- 179, 539, 267, 781, 859, 937, 2287 sayılarının hangileri asaldır?

2- $B = \{x : x$ asal sayı ve $-10 < x < 30\}$ kümesinin elemanlarını yazın.

3- "$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $n^2 - n + 41$ asal sayıdır." önermesinin doğruluk değeri nedir?

4- $6n-1$ şeklinde yazılabilen asal sayıların kümesinin sonsuz olduğunu ispat edin.

5- 3 den büyük her asal sayının $6k+1$ veya $6k-1$ şeklinde yazılabileceğini göst?

6- 4 veya 4 ten büyük her çift sayının iki asal sayının toplamı olarak yazıldığı bilindiğine göre, 7'den büyük her tek doğal sayının 3 asal sayının toplamı olarak yazıldığını gösterin.

Çözümler:

1- $539 \Rightarrow 23^2 < 539 < 24^2$ $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

$2287 \Rightarrow 47^2 < 2287 < 48^2$

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$

2- $\{-7, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

3- "$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $n^2 - n + 41$ asaldır."

$n = 1$, $1^2 - 1 + 41 = 41$

$n = 4$, $4^2 - 4 + 41 = 53$

5	61
20	421
41	41^2

4- $\{p_1, p_2, \ldots, p_t\} = A$ $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_t$

$u = 6(\underbrace{p_1 p_2 \ldots p_n}_{n}) - 1$ A sonsuzdur.

6- n tek ve $n > 7 \Rightarrow (n-3 > 4 \wedge n-3$ çift$) \Rightarrow \exists p, q$ asal, $n - 3 = p + q$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 3 + p + q$

(Her tamsayı ya asaldır veya asal sayıların çarpımı olarak, sıra önemli olmamak üzere, asal sayıların çarpımı olarak, tek türlü olarak yazılır.)

Örnek// 60 sayısının pozitif bölenleri nedir?

$60 = 2^2 . 3 . 5$

1°) $2^0, 2^1, 2^2$ 60'ın birer pozitif bölenidir.

$1, 2, 4$

2°) $3.1, 3.2, 3.4$ 'de 60 'ın pozitif bölenidir.

3°) $5.1, 5.2, 5.4, 5.3.1, 5.3.2, 5.3.4$ 60'ın pozitif bölenleridir.

$\{B(60)\}^+ = \{1, 2, 4, 3, 6, 12, 5, 10, 20, 15, 30, 60\}$

Bir a tamsayısının pozitif bölenleri kümesinin eleman sayısını $V(a)$ ile sembolik olarak gösterelim.

Teorem: Bir a^+ tamsayısının pozitif asal çarpanlarının kuvvetlerine göre yazılış biçimi $a = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ olduğuna göre

$$V(a) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \ldots (\alpha_r+1) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i+1)$$

İspat// a'nın bir pozitif böleni u olsun. $a = uv$ şeklinde bir v pozitif böleni vardır.

$u = p_1^{\beta_1} . p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$ yazılabilir. $a = uv$ olduğundan

$\Rightarrow p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} = p_1^{\beta_1} p_1^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r} \Rightarrow p_1^{\alpha_1-\beta_1} . p_2^{\alpha_2-\beta_2} \ldots p_r^{\alpha_r-\beta_r}$

$u = p_1^{\beta_1} . p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$ ifadesinde $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$

β_1 yerine $0, 1, 2, \ldots, \alpha_1$ sayılarını verelim.

$\Rightarrow \alpha_1 + 1$ tane çarpan (bölen) bulunur.

β_2 yerine $0, 1, 2, \ldots, \alpha_2$ sayılarını verelim.

$\Rightarrow \alpha_2 + 1$ tane çarpan (bölen) bulunur.

- - - - - - - - - - - -

β_r yerine $0, 1, 2, \ldots, \alpha_r$ sayılarını verelim.

$\Rightarrow \alpha_r + 1$ tane çarpan (bölen) bulunur.

$\nu(a) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$

Örnek// 1400 sayısının pozitif asal bölenleri kaç tanedir?

$1400 = 2^3 . 5^2 . 7^1$

$p_1 = 2, \alpha_1 = 3$; $p_2 = 5, \alpha_2 = 2$; $p_3 = 7, \alpha_3 = 1$

$\nu(1400) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24$ tane

Pozitif bölenleri $\Rightarrow$

1-) $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ 1400 ün pozitif bölenleridir.

2-) $\cancel{5^0 = 1}$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$ " "

3-) 5.2, 5.4, 5.8, 25.2, 25.4, 25.8 " "

4-) $7.1 = 7$, 7.2, 7.4, 7.8, 7.5, 7.25, $7.5.2$, $7.5.4$, $7.5.8$, $7.25.2$, $7.25.4$, $7.25.8$, 1400 ün pozitif bölenleridir.

Teorem: Pozitif bir a tamsayısının pozitif bölenlerinin sayısı $\nu(a)$ ise a'nın pozitif bölenlerinin çarpımı,

$\boxed{a^{1/2\,\nu(a)}}$ dır.

İspat// a'nın pozitif bir böleni u olsun. $a = u.v$ şeklinde yazılabilir.

v'de pozitif bir bölendir. a'nın pozitif bölenlerinin kümesi,

$A = \{1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a\}$

$1 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-2} < a_{n-1} < a$

$u = 1 \Rightarrow v = a \Rightarrow a = \overset{u}{1}.\overset{v}{a} = \overset{u}{a}.\overset{v}{1}$

$u = a_1 \Rightarrow v = a_{n-1} \Rightarrow a = a_1 . a_{n-1} = a_{n-1} . a_1$

$u = a_2 \Rightarrow v = a_{n-2} \Rightarrow a = a_2 . a_{n-2} = a_{n-2} . a_2$

$a^{\nu(a)} = (1.a)(a_1.a_{n-1})(a_2.a_{n-2}) \dots (a_{n-2}.a_2)(a_{n-1}.a_1)(a.1)$

$\Rightarrow a^{\nu(a)} = (1.a_1.a_2 \dots a_{n-2}.a_{n-1}.a)^2$

$\Rightarrow \boxed{a^{\frac{1}{2}\nu(a)} = (1.a_1.a_2 \dots a_{n-2}.a_{n-1}.a)}$

Örnek// 60'ın pozitif bölenlerinin çarpımı nedir?

$60 = 2^2.3^1.5^1$

$\nu(60) = 3.2.2 = 12$ tane

$60^{1/2\,\nu(60)} = 60^6 = 46656000000$

Teorem: Pozitif bir a tamsayısının asal çarpanlarının kuvvetlerine göre yazılış biçimi $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ olduğuna göre a'nın pozitif bölenlerinin toplamı $\sigma(a)$ ise,

$$\sigma(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$$

İspat// a'yı aralarında asal olan u, v tamsayılarının çarpımı olarak yazalım. yani $a = uv \wedge (u,v)=1$ olsun. u'nun pozitif bölenleri,

$1, u_1, u_2, \dots, u$

v'nin pozitif bölenleri, $1, v_1, v_2, \dots v$

Eğer d/a ise $d = u_i v_i$ şeklinde yazılabilir.

1- $1.1, 1.u_1, 1.u_2, \dots, 1.u$ da a'nın bölenleridir.

2- $v_1.1, v_1.u_1, v_1.u_2, \dots, v_1.u$ " " " .

3- $v_2.1, v_2.u_1, v_2.u_2, \dots, v_2.u$ " " "

$\vdots$

$+$ $v.1, v.u_1, v.u_2, \dots, v.u$ " " "

$$\sigma(a) = 1.1 + 1.u_1 + 1.u_2 + \dots + 1.u + v_1.1 + v_1.u_1 + \dots + v_2.u + v_2.1 + v_2.u_1 + \dots + v_2.u$$
$$\dots + v.1 + v.u_1 + \dots + u.v$$

$$= \sigma(u) + v_1.\sigma(u) + v_2\sigma(u) + \dots + v\sigma(u)$$

$$= \sigma(u)(1 + v_1 + v_2 + \dots + v)$$

$$= \sigma(u)\sigma(v)$$

$$\Rightarrow [a = u.v \wedge (u,v)=1] \Rightarrow \sigma(a) = \sigma(u).\sigma(v)$$

$$\Rightarrow a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \Rightarrow \sigma(a) = \sigma(p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r})$$

$$\Rightarrow \sigma(a) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_r^{\alpha_r})$$

p^α nın pozitif bölenleri (p asal)

$p^0 = 1, \ p^1 = p, \ p^2, p^3, \dots, p^\alpha$

$$\Rightarrow \sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^\alpha$$

$$p.\sigma(p^\alpha) = p + p^2 + p^3 + p^4 + \dots + p^\alpha + p^{\alpha+1}$$

$$\sigma(p^\alpha)(p-1) = p^{\alpha+1} - 1 \Rightarrow \sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$$

$$\Rightarrow \sigma(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$$

a^+ nın pozitif bölenleridir.

Örnek // 120 sayısının pozitif bölenleri toplamı nedir?

$120 = 2^3 . 3^1 . 5^1$

$$\sigma(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} p_1=2 & \alpha_1=3 \\ p_2=3 & \alpha_2=1 \\ p_3=5 & \alpha_3=1 \end{array}\right\} \sigma(120) = \frac{2^{3+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{1+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} = \frac{2^4-1}{1} \cdot \frac{3^2-1}{2} \cdot \frac{5^2-1}{4}$$

$$= 15 . 4 . 6 = 360$$

Tanım: (Mükemmel - Perfect - Yetkin Sayı):

$a \in Z$ olsun. $\sigma(a) = 2|a|$ ise a sayısına mükemmel (yetkin) sayı denir.

Örnek // 28 sayısı yetkin midir?

$28 = 2^2 . 7$

$\sigma(28) = \frac{2^3-1}{2-1} \cdot \frac{7^2-1}{7-1} = 7.8 = 56 = 2.28$ yetkindir.

Teorem: $p \in Z^+$ olsun. 2^p-1 asal sayı ise $2^{p-1}(2^p-1)$ şeklinde yazılan her tamsayı yetkindir.

İspat // $a = 2^{p-1}(2^p-1)$ olsun. $2^p-1 = n$ olsun.

$a = 2^{p-1}.n \Rightarrow \sigma(a) = \sigma(2^{p-1})\sigma(n) = \frac{2^p-1}{2-1}(1+n)$

$\Rightarrow \sigma(a) = (2^p-1)2^p = 2.\underbrace{2^{p-1}(2^p-1)}_{a} \Rightarrow \sigma(a) = 2a = 2|a|$

Örnek // $p=5$, $2^p-1 = 2^5-1 = 31$ asaldır.

496 sayısı, $496 = 31.16 = 2^4.31 = 2^{5-1}.(2^5-1)$ yetkindir.

Tanım: (Çok katlı yetkin Sayı):

$a, k \in Z^+$ olsun. $\sigma(a) = (k+1)a$ ise a sayısına k. dereceden yetkin sayı denir. (k. sınıftan yetkin sayı denir.) k: çok katlı yetkin sayının sınıfı denir

Örnek // 120 sayısı kaçıncı sınıftan yetkin sayıdır?

$\sigma(120) = 360 = 3.120$ $\quad k+1 = 3 \quad k = 2$

2. dereceden (sınıftan) yetkin sayıdır.

Problemler :

1 - 540 sayısının pozitif bölenlerinin; sayısını, çarpımını, toplamını, kümesini ?

2 - 4680, 1275, 1321 sayılarının pozitif bölenlerinin toplamını ?

3 - 8128 sayısı yetkin sayı mıdır ?

Çözümler :

1 - $540 = 2^2 . 3^3 . 5^1$

$\nu(540) = (2+1)(3+1)(1+1) = 3.4.2 = 24$ tane böleni var.

$540^{1/2\,\nu(24)} = 540^{12}$ çarpımı

$\sigma(540) = \frac{2^{2+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{3+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} = 7.40.6 = 1680$ toplamı

$2^0 . 2^1 . 2^2$ 1, 4.4 $3^1, 3^2, 3^3, 5^1$ 3, 7, 27, 5

$3.1, 3.2, 3.4, 3^2.1, 3^2.2, 3^2.4, 3^3.1, 3^3.2, 3^3.4, 5.1, 5.2, 5.4, 5.3, 5.3^2, 5.3^3$

$5.3.2, 5.3.4, 5.9, 5.9.2, 5.9.4, 5.27, 5.27.2, 5.27.4$

$\{1, 2, 4, 3, 9, 27, 5, 6, 12, 18, 36, 54, 108, 10, 20, 15, 45, 135, 30, 60, 90, 180, 270, 540\}$

3 - $8128 = 2^6 . 127$

$\sigma(8128) = \frac{2^7-1}{1} \cdot \frac{127^2-1}{126} = 127 . \frac{127^2-1}{126} = 2.8128$ yetkin sayıdır.

- MODÜLER ARİTMETİK -

Tanım : $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x-y$ sayısı m sayısına bölünüyorsa x sayısı y sayısına m modülüne göre denktir denir. Ve

$$x \equiv y \pmod{m} \iff m \mid x-y$$

şeklinde gösterilir. $u, v \in \mathbb{Z}$ olmak üzere u ve v tam sayılarının m modülüne göre denk olmadığı

$u \not\equiv v \pmod{m}$ şeklinde gösterilir.

Örnek // $5 / 13-3 \Rightarrow 13 \equiv 3 \pmod{5}$

Örnek // $7 / -12-2 \Rightarrow -12 \equiv 2 \pmod{7}$

1. Teorem : $x, y \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $x \equiv y \pmod{m} \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ için $x = y + mk$ olmasıdır.

$\Rightarrow$ kabul edelim ki, $x \equiv y \pmod{m}$ olsun

$\Rightarrow m \mid x-y$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ vardır ki $x-y = mk$ dır. $\Rightarrow x = y + mk$

$\Leftarrow$: kabul edelim ki $\exists k \in \mathbb{Z}$ için $x = y + mk$ olsun.

$\Rightarrow x - y = mk$ dır.

$\Rightarrow m \mid x - y$

$\Rightarrow x \equiv y \pmod{m}$

2. Teorem: $x, y \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $x \equiv y \pmod{m}$ olması için x ile y'nin m ile bölünmesinden elde edilen kalanların eşit olması gerekir ve yeter.

İspat // : $\Rightarrow$ kabul edelim ki $x = y \pmod{m}$ olsun.

$x = mp + r$, $0 \leq r < m$ dir. - - - - (1)

$y = mq + s$, $0 \leq s < m$ vardır.

$r \overset{?}{=} s$ $\quad x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow m \mid x - y$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $x - y = mk$

$\Rightarrow x = y + mk$

$\Rightarrow x = mq + s + mk$

$\Rightarrow x = m(q + k) + s$ - - - (2)

(1) ve (2) den dolayı $r = s$ dir.

$\Leftarrow$: $x = mp + r$, $0 \leq r < m$

$y = mq + s$, $0 \leq s < m$ $\quad$ kabul edelim ki $r = s$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} x = mp + r \Rightarrow r = x - mp \\ y = mq + s \Rightarrow s = y - mq \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x - mp = y - mq \\ x - y = mp - mq = m(p - q) \\ m \mid x - y \Rightarrow x \equiv y \pmod{m} \end{array}$$

3. Teorem: $x, y, z, w, u, v \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$x \equiv y \pmod{m}$ ve $z \equiv w \pmod{m}$ ise aşağıdaki önermeler doğrudur.

a) $x + u \equiv y + u \pmod{m}$

b) $xu \equiv yu \pmod{m}$

c) $x + z \equiv y + w \pmod{m}$

d) $x - z \equiv y - w \pmod{m}$

e) $xz \equiv yw \pmod{m}$

f) $ux + vz \equiv uy + vw \pmod{m}$ dir.

ispat// a- $x \equiv y \pmod m \Rightarrow m \mid x-y$ (mod tanımı)

$\Rightarrow x-y = mk, \ \exists k \in \mathbb{Z}$ (hipotezden)

$\Rightarrow x = y+mk$ (x'i çekerek)

$\Rightarrow x+u = y+mk+u$ (her iki tarafa u ekleyerek)

$\Rightarrow (x+u) = (y+u)+mk$ (+ nın değişme öz.)

$\Rightarrow x+u \equiv y+u \pmod m$ (mod tanımı)

b- $xu \equiv yu \pmod m \Rightarrow m \mid x-y$

$\Rightarrow x = y+mk$

$\Rightarrow xu = (y+mk)u$

$\Rightarrow xu = yu+mku$

$\Rightarrow xu \equiv yu \pmod m$

4.Teorem: $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$x \equiv y \pmod m \Rightarrow x^n \equiv y^n \pmod m$ dir.

ispat// Tümevarımla yapılacaktır.

5.Teorem: $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$zx \equiv zy \pmod m$, OBEB$(z,m) = d$ ve $m = dm'$ ise,

$x \equiv y \pmod{m'}$ olur.

ispat// $zx = zy \pmod m$ OBEB$(z,m) = d$ ve $m = dm'$ olsun.

OBEB$(z,m) = d \Rightarrow d/z$ dir.

$z = dz'$ olacak şekilde $\exists z' \in \mathbb{Z}$ vardır.

$zx = zy \pmod m \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ için $zx = zy+mk$ dır.

$\Rightarrow dz'x = dz'y + dm'k$

$\Rightarrow \cancel{d}z'x = \cancel{d}(z'y+m'k)$

$\Rightarrow z'x = z'y+m'k$

$\Rightarrow z'(x-y) = m'k$ [ödev $(m', z') = 1$]

$\Rightarrow m' \mid x-y \Rightarrow x \equiv y \pmod{m'}$ dir.

6.Teorem: $x \equiv y \pmod m$ ve $d \mid m$ ise $x \equiv y \pmod d$ dir.

ispat// $x \equiv y \pmod m \Rightarrow m \mid x-y$ $d \mid m \Rightarrow$ geçişme öz.'den $d \mid x-y$ dir.

$\Rightarrow x \equiv y \pmod d$ dir.

Örnek// $47 \equiv (-1) \bmod 12$ ise

$3/12$ ve $4/12 \Rightarrow 47 \equiv (-1) (\bmod 3)$

$47 \equiv (-1) (\bmod 4)$

7.Teorem: $x, y \in \mathbb{Z}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ ve $OKEK(m_1, m_2) = m$ olsun.

$x \equiv y (\bmod m) \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod m_1)$ ve $x \equiv y (\bmod m_2)$ dir.

İspat// $:\Rightarrow$ $OKEK(m_1, m_2) = m$, $x \equiv y (\bmod m)$ olsun.

m/m_1 ve m/m_2

6. teoremden dolayı, $x \equiv y (\bmod m_1)$, $x \equiv y (\bmod m_2)$

$:\Leftarrow$ $x \equiv y (\bmod m_1)$ ve $x \equiv y (\bmod m_2)$ olsun.

$OKEK(m_1, m_2) = m$ $\quad \left.\begin{array}{l} x \equiv y (\bmod m_1) \Rightarrow m_1 / x-y \\ x \equiv y (\bmod m_2) \Rightarrow m_2 / x-y \end{array}\right\}$ $OKEK(m_1, m_2) = m$ olduğundan,

$m \mid x-y \Rightarrow x \equiv y (\bmod m)$

Örnek// $32 \equiv 104 (\bmod 8) \wedge 32 \equiv 104 (\bmod 12)$ ve $OKEK(8, 12) = 24$ ise

$32 \equiv 104 (\bmod 24)$ önermesi de doğrudur.

Teorem: (Genelleştirme): $m_i = (i = 1, 2, \ldots, n) \in \mathbb{Z}^+$ $(m_i, m_j) = 1$ olsun

$x \equiv y (\bmod m_i) \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod m_1, m_2, \ldots, m_n)$

Sonuç// Pozitif bir m tamsayısının asal sayıların kuvvetlerine göre yazılış biçimi, $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ olsun.

$x \equiv y (\bmod m) \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod p_i^{\alpha_i})$

Örnek// $425 \equiv 5 (\bmod 60) \wedge 60 = 2^2 . 3 . 5$

$\Rightarrow 425 \equiv 5 (\bmod 2^2) \wedge 425 \equiv 5 (\bmod 3) \wedge 425 \equiv 5 (\bmod 5)$

Teorem: $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \equiv y (\bmod m)$ olsun.

$[(x:d) = u$ ve $(y:d) = v$ ve $(m:d) = n] \Rightarrow u \equiv v (\bmod n)$

İspat// a) $(x:d) = u \wedge (y:d) = v \wedge (m:d) = n \Rightarrow x = ud \wedge y = vd \wedge m = nd$

b) $x \equiv y (\bmod m) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $x = y + km$

$\Rightarrow ud = vd = k(nd) \Rightarrow ud = (v + kn)d \Rightarrow u = v + kn \Rightarrow u \equiv v (\bmod n)$

Örnek// $28 \equiv 12 (\bmod 8) \Rightarrow 7.4 = 3.4 (\bmod 2.4) \Rightarrow 7 \equiv 3 (\bmod 2)$

Problemler:

1- 3^{100} ün 5 modülüne göre denk olduğu en küçük pozitif tamsayı nedir?

2- $\sum_{i=1}^{5} i \equiv x \pmod 7$ ise $x = ?$ (en küçük $x \in Z^+$)

3- $23^{2n+1} + 1 \equiv x \pmod{24}$ bağıntısını sağlayan en küçük pozitif $x = ?$

4- $3^{2n} + 7 \equiv 0 \pmod 8$

5- $a, b \in Z^+$, $a < m \wedge b < m$ olsun. $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a = b$ old. isp.?

6- $a, b \in Z^+$ ve m asal olsun. $(a+b)^m \equiv a^m + b^m \pmod m$ old. isp.?

Çözümler:

1- $3^{100} \equiv x \pmod 5$ $\qquad 3^3 \equiv 2 \pmod 5$

$3 \equiv 3 \pmod 5$ $\qquad 3^4 \equiv 1 \pmod 5$

$3^2 \equiv 4 \pmod 5$ $\qquad (3^4)^{25} \equiv 3^{100} \equiv 1^{25} \pmod 5 \Rightarrow 3^{100} \equiv 1 \pmod 5$ //

2- $\sum_{i=1}^{5} x \pmod 7 \equiv \frac{5.6}{2} \equiv 15$

$15 \equiv 1 \pmod 7$ $\qquad x = 1$ //

3- $23 \equiv -1 \pmod{24}$ $\qquad x \equiv y \pmod m \Rightarrow x^n \equiv y^n \pmod m$

$\Rightarrow 23^2 \equiv (-1)^2 \pmod{24}$

$\Rightarrow 23^2 \equiv 1 \pmod{24}$

$\Rightarrow (23^2)^n \equiv 23^{2n} \equiv 1^n \pmod{24}$

$\Rightarrow 23^{2n} \equiv 1 \pmod{24}$

$\Rightarrow 23^{2n} . 23 \equiv 1.23 \pmod{24} \equiv 23^{2n+1} \equiv 23 \pmod{24}$

$$\begin{array}{r} 23^{2n+1} \equiv 23 \pmod{24} \\ + \quad 1 \equiv 1 \pmod{24} \\ \hline 23^{2n+1} + 1 \equiv 0 \pmod{24} \end{array}$$

4- $3^{2n} + 7 \equiv 0 \pmod 8$

$\Rightarrow 3 \equiv 3 \pmod 8$

$\Rightarrow 3^2 \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow (3^2)^n \equiv 1^n \pmod 8$

$\Rightarrow 3^{2n} \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 7 \equiv 7 \pmod 8 \\ + \quad 3^{2n} \equiv 1 \pmod 8 \\ \hline 3^{2n} + 7 \equiv 0 \pmod 8 \end{array}$$

5- $a,b \in Z^+$, $a<m \wedge b<m \Rightarrow a \equiv b (\text{mod}\, m) \Rightarrow a \overset{?}{=} b$

$a \equiv b (\text{mod}\, m) \Rightarrow m / a-b \wedge a-b < mn \quad a>b$

$\Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$

6- $a,b \in Z^+$, m asal $\Rightarrow (a+b)^m \equiv a^m + b^m (\text{mod}\, m)$

$$(a+b)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^{m-i} . b^i = \binom{m}{0} a^m b^0 + \binom{m}{1} a^{m-1} b^1 + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \dots + \binom{m}{m-2} a^{m-(m-2)} b^{m-2}$$
$$+ \binom{m}{m-1} a^{m-(m-1)} b^{m-1} + \binom{m}{m} a^{m-m} . b^m$$

$$(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \dots + \frac{m(m-1)}{2} a^2 b^{m-2} + m a . b^{m-1} + b^m$$

$$(a+b)^m - [a^m + b^m] = mk, \; k \in Z$$

$$\Rightarrow (a+b)^m \equiv a^m + b^m (\text{mod}\, m)$$

Kalan Sınıfları

Tamsayılar kümesinde m modülüne göre denk olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. (yansıma, simetri, geçişmeli)

İspat// $x \equiv y (\text{mod}\, m) \Rightarrow m / x-y \Leftrightarrow \beta$

1° $\forall x \in Z$ için $x-x=0 \Rightarrow m/0 \Rightarrow x \equiv x (\text{mod}\, m) \Rightarrow (x,x) \in \beta$

2° $x,y \in Z$ için $(x,y) \in \beta \Rightarrow x \equiv y (\text{mod}\, m) \Rightarrow m / x-y \Rightarrow m / -(y-x) \Rightarrow m / y-x$

$\Rightarrow y \equiv x (\text{mod}\, m) \Rightarrow (y,x) \in \beta$

3° Ödev//

Tanım: m modülüne göre denk olma denklik bağıntısının, tamsayılar kümesinden ayırdığı denklik sınıflarına, m'nin kalan sınıfları denir.

$\forall x \in Z$ için $\overline{x} = \{y : y \in Z \wedge y \equiv x (\text{mod}\, m)\}$

Teorem: Z'de tanımlı m modülüne göre denk olma bağıntısının Z'den ayırdığı farklı denklik sınıfı sayısı m tanedir.

İspat// Herhangi bir tamsayının m'ye bölümünde bulunan kalanlar;

$0, 1, 2, 3, \dots, m-1$ sayılarından birisidir. (m tanedir.)

Bu m tane kalan birbirinden farklıdır. Bunların denklik sınıfları;

$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{m-1}$ (m tanedir.)

$\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{m-1}\}$ kümesi Z nin bir ayrımıdır.

$Z/m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$

Buna göre, $\bar{x}, \bar{y} \in Z/m$ olmak üzere, $a \in \bar{x} \Rightarrow x \equiv a \pmod{m}$

$b \in \bar{y} \Rightarrow y \equiv d \pmod{m}$

1° $x+y \equiv (a+b) \pmod{m} \Leftrightarrow \overline{x+y} = \overline{a+b}$

2° $xy = ab \pmod{m} \Leftrightarrow \overline{xy} = \overline{ab}$

Tanım: (Z/m de Toplama):

$\oplus : Z/m \times Z/m \longrightarrow Z/m$

$(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y}$ olarak tanımlanan bu işleme Z/m de kalanlı toplama denir.

Tanım: (Z/m de Çarpma):

$\odot : Z/m \times Z/m \longrightarrow Z/m$

$(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \bar{x} \odot \bar{y} = \overline{xy}$ // // // //

kalanlı çarpma denir.

Teorem: $Z/m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ kümesi verildiğinde $(Z/m, \oplus, \odot)$ matematik yapısı birim elemanlı komütatif bir halkadır.

İspat// $(Z/m, \oplus, \odot)$

I- $(Z/m, \oplus)$ bir abel grubudur ?

a) Birim eleman (sıfır) $\forall \bar{x} \in Z/m \wedge \exists e \in Z/m,\ \bar{x} \oplus e = e \oplus \bar{x} = \bar{x}$

$\left.\begin{array}{l} \bar{x} \oplus e = \bar{x} \quad e = \bar{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} \oplus \bar{y} = \bar{x} \Rightarrow \overline{x+y} = \bar{x} \Rightarrow x+y \equiv x \pmod{m}$

$\Rightarrow \exists k \in Z,\ x+y = x+km \Rightarrow y = km \Rightarrow y \equiv 0 \pmod{m}$

$\Rightarrow \bar{y} = \boxed{\bar{0} = e}$ (kapalılık, birleşme, değişme, ters eleman : ödev)

II- a) Birim eleman ($\odot$ işlemine göre)

$\forall \bar{x} \in Z/m \Rightarrow \bar{x} \odot e = e \odot \bar{x} = \bar{x}$

$\Rightarrow \bar{x} \odot e = \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \odot \bar{y} = \bar{x} \Rightarrow \overline{xy} = \bar{x} \Rightarrow xy \equiv x \pmod{m}$

$e \in Z/m,\ e = \bar{y}$

$\Rightarrow \exists k \in Z,\ xy = x+km \Rightarrow xy - x = km \Rightarrow x(y-1) = km$

$\Rightarrow m / x(y-1),\ \forall x \in Z \Rightarrow m / x(y-1) \wedge (m,x) = 1 \Rightarrow m / y-1$

$\Rightarrow y = 1 \pmod{m} \Rightarrow \bar{y} = e = \bar{1}$

III - Dağılma özelliği vardır. $\Rightarrow (Z/m, \oplus, \odot)$

Teorem: m asal sayı ise Z/m bir tamlık bölgesidir.

İspat// $\bar{x}, \bar{y} \in Z/m$ olsun. $\bar{x} \odot \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow (\bar{x} = \bar{0} \vee \bar{y} = \bar{0})$

$\bar{x} \odot \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow xy \equiv 0 (\text{mod} m) \Rightarrow \exists k \in Z,\ xy = km$

$\Rightarrow m/xy \Rightarrow (m/x \vee m/y) \Rightarrow [x \equiv 0 (\text{mod} m) \vee y \equiv 0 (\text{mod} m)]$

$\Rightarrow (\bar{x} = \bar{0} \vee \bar{y} = \bar{0})$

$m = 10,\ \bar{x} = \bar{2} \wedge \bar{y} = \bar{5} \Rightarrow \bar{x} \odot \bar{y} = \bar{2} \odot \bar{5} = \bar{0}$

Teorem: m asal sayı ise $(Z/m, \oplus, \odot)$ bir cisimdir.

$Z/m - \{\bar{0}\}$ kümesinin ters elemen özelliği vardır. ?

$\forall x \in Z/m - \{\bar{0}\} \Rightarrow \bar{x} \neq \bar{0} \Rightarrow x \not\equiv 0 (\text{mod} m) \Rightarrow m \nmid x \Rightarrow OBEB(m, x) = 1$

$\Rightarrow (m, x) = 1 \Rightarrow \exists u, v \in Z,\ 1 = mu + xv \Rightarrow 1 - xv = mu \Rightarrow m / 1 - xv$

$\Rightarrow m / xv - 1 \Rightarrow xv = 1 (\text{mod} m) \Rightarrow \overline{xv} = \bar{1} \Rightarrow \bar{x} \odot \bar{v} = \bar{1} \Rightarrow x^{-1} = \bar{v} \in Z/m$

Tanım: $(Z/m, \oplus, \odot)$ cismine asal cisim denir.

- Bölünebilme Kuralları -

Teorem: $a \in Z$ olsun.

1- a nın 2 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart, birler basamağındaki rakamın gösterdiği sayının 2 ile bölünebilmesidir.

2- a nın 5 ile bölünebilmesi için " " " , " "
" " " 5 ile bölünebilmesidir.

3- a nın 3 ile bölünebilmesi için " " " , rakamları toplamının 3 ile bölünebilmesidir.

4- a'nın 9 ile bölünebilmesi için " " " , " "
9 ile bölünebilmesidir.

İspat// 1- $a = (x_n x_{n-1} \dots x_1 . x_0)_{10} = x_0 + x_1 . 10 + x_2 . 10^2 + \dots + x_{n-1} 10^{n-1} + x_n 10^n = \sum_{i=0}^{n} x_i 10^i$

$x_0 \equiv x_0 (\text{mod} 2)$

$10 \equiv 0 (\text{mod} 2) \quad x_1 \equiv x_1 (\text{mod} 2) \Rightarrow 10 x_1 \equiv 0 x_1 (\text{mod} 2)$

$\Rightarrow 10 x_1 \equiv 0 (\text{mod} 2)$

$\left.\begin{array}{l} 10^i \equiv 0^i (\text{mod} 2) \\ x_i \equiv x_i (\text{mod} 2) \end{array}\right\} \xrightarrow{i > 0} x_i 10^i \equiv \underbrace{0^i}_{0} . x_i (\text{mod} 2)$

$a \equiv (x_0 + 0 + \dots + 0) \pmod 2 \Rightarrow a \equiv x_0 \pmod 2$

$2/a \Rightarrow 2/a \wedge 2/a - x_0 \Leftrightarrow 2/x_0 \Rightarrow (2/a \Leftrightarrow 2/x_0)$

2- $a = x_0 + 10x_1 + 10^2 x_2 + \dots + 10^n x_n \qquad x_0 \equiv x_0 \pmod 5$

$x_1 \equiv x_1 \pmod 5$, $10 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 10x_1 \equiv 0 \pmod 5$

$10^i x_i \equiv 0 \pmod 5$, $i > 0$

$a \equiv (x_0 + 0) \pmod 5 \Rightarrow a \equiv x_0 \pmod 5$

$(5/a \Leftrightarrow 5/x_0)$

3- $a = x_0 + 10x_1 + 10^2 x_2 + \dots + 10^n x_n \qquad x_0 = x_0 \pmod 3$

$x_1 \equiv x_1 \pmod 3$, $10 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 10x_1 \equiv x_1 \pmod 3$

$x_i \equiv x_i \pmod 3 \qquad 10^i \equiv 1^i \pmod 3 \qquad i > 0$

$\Rightarrow x_i 10^i \equiv x_i \pmod 3$

$\Rightarrow a \equiv (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n) \pmod 3$

$\Rightarrow a \equiv \sum_{i=0}^{n} x_i \pmod 3 \Rightarrow 3/a \Leftrightarrow 3/\sum_{i=0}^{n} x_i$

Teorem: $a \in \mathbb{Z}^+$ ve $a = x_n 10^n + x_{n-1} 10^{n-1} + \dots + x_1 10 + x_0 = \sum_{i=0}^{n} x_i 10^i$ olsun.

a) $a \equiv (10x_1 + x_0) \pmod 4 \rightarrow$ yani $(4/a \Leftrightarrow 4/10x_1 + x_0 = (x_1 x_0)_0$

b) $a \equiv (10x_1 + x_0) \pmod{25} \rightarrow (25/a \Leftrightarrow 25/10x_1 + x_0)$

c) $a \equiv (100x_2 + 10x_1 + x_0) \pmod 8 \rightarrow (8/a \Leftrightarrow 8/100x_2 + 10x_1 + x_0 = (x_2, x_1, x_0)_{10}$

İspat// a- $\left.\begin{array}{l} x_1 10 + x_0 \equiv x_1 . 10 + x_0 \pmod 4 \\ 10^2 = 100 \equiv 0 \pmod 4 \end{array}\right\} x_2 10^2 \equiv 0 \pmod 4$

$\left.\begin{array}{l} i \geq 2 \Rightarrow 10^i \equiv 0 \pmod 4 \\ x_i \equiv x_i \pmod 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x_i 10^i \equiv 0 \pmod 4$

$a \equiv (x_1 . 10 + x_0 + 0 + \dots + 0) \pmod 4 \Rightarrow a \equiv x_1 . 10 + x_0 \pmod 4$

$\Rightarrow 4/a \Leftrightarrow 4/x_1 10 + x_0$

Teorem: $a \in \mathbb{Z}^+$ ve $a = \sum_{i=0}^{n} x_i 10^i$ olsun.

a- $a \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \pmod{11}$

b'- $a \equiv \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i (x_i + 3x_{i+1} + 2x_{i+2})}_{A} \pmod 7$

$= (x_0 + 3x_1 + 2x_2) - (x_3 + 3x_4 + 2x_5) + (x_6 + 3x_7 + 2x_8) - \dots + (-1)^{n-2} [x_{n-2} + 3x_{n-1} + 2x_n]$

a) $11/a \iff 11 / \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i$

b) $7/a \iff 7/A$

ispat// a- $x_0 \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow x_0 \equiv (-1)^0 x_0 (\mathrm{mod}\, 11)$

$10 \equiv (10+1-1)(\mathrm{mod}\, 11)$

$10 \equiv 11-1 (\mathrm{mod}\, 11)$

$$\left.\begin{array}{l} 10 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 11) \\ x_1 \equiv x_1 (\mathrm{mod}\, 11) \end{array}\right\} 10x_1 \equiv -x_1 (\mathrm{mod}\, 11)$$

$\Rightarrow 10x_1 \equiv (-1)x_1 (\mathrm{mod}\, 11)$

$$\left.\begin{array}{l} 10^2 \equiv (-1)^2 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow 10^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow 10^2 \equiv (-1)^2 (\mathrm{mod}\, 11) \\ \qquad\qquad \Rightarrow x_2 \equiv x_2 (\mathrm{mod}\, 11) \end{array}\right\} \Rightarrow 10^2 x_2 \equiv (-1)^2 x_2 (\mathrm{mod}\, 11)$$

$\Rightarrow 10^3 x_2 \equiv (-1)^3 x_3 (\mathrm{mod}\, 11)$

$10^i x_i \equiv (-1)^i x_i (\mathrm{mod}\, 11)$ (Taraf tarafa toplanırsa)

$a \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i (\mathrm{mod}\, 11)$

$11/a \iff 11 / \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i$

b- $x_0 \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, 7)$

$$\left.\begin{array}{l} 10 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7) \\ x_1 \equiv x_1 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} \Rightarrow 10x_1 \equiv 3x_1 (\mathrm{mod}\, 7)$$

$$\left.\begin{array}{l} 10^2 \equiv 3.10 (\mathrm{mod}\, 7) \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7) \\ x_2 \equiv x_2 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} \Rightarrow 10^2 x_2 \equiv 2x_2 (\mathrm{mod}\, 7)$$

$\Rightarrow x_0 + 10x_1 + 10^2 x_2 \equiv x_0 + 3x_1 + 2x_2 (\mathrm{mod}\, 7)$

$\equiv (-1)^0 x_0 + 3x_1 + 2x_2 (\mathrm{mod}\, 7)$

$10^3 \equiv 10^2 10 \equiv 2.3 (\mathrm{mod}\, 7) \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7) \equiv (-1) (\mathrm{mod}\, 7)$

$$\left.\begin{array}{l} 10^3 \equiv (-1) (\mathrm{mod}\, 7) \\ x_3 \equiv x_3 (\mathrm{mod}\, 7) \end{array}\right\} 10^3 x_3 \equiv (-1) (\mathrm{mod}\, 7)$$

$10^4 \equiv 10^3.10 \equiv (-1)\, 3 (\mathrm{mod}\, 7)$

$10^4 \equiv (-1)^1 3 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 10^4 x_4 \equiv (-1)^1 3 x_4 (\mathrm{mod}\, 7)$

$10^5 \equiv 10^3.10^2 \equiv (-1)^1 2 (\mathrm{mod}\, 7)$

$10^5 x_5 \equiv (-1)^1 2x_5 (\mathrm{mod}\, 7)$

$a \equiv (-1)^0 x_0 + 3x_1 + 2x_2 + (-1)^1 (x_3 + 3x_4 + 2x_5) + \dots) \pmod 7$

Problemler :

1- Bölme işlemi yapmadan 432561 sayısının 99 a bölümündeki kalanı bulun.

2- 2373^{427} sayısının birler basamağındaki rakamı bulun.

3- $19^3 . 288^2$ sayısının 5 ile bölümündeki kalanı bulun.

4- $5^{73} + 9^{12}$ sayısının 7 ile bölümündeki kalanı bulun. (6 dır.)

5- $\forall n \in \mathbb{N}$ için $3^{2n} - 2^n$ sayısının 7 ile bölündüğünü gösterin.

6- $\forall n \in \mathbb{N}$ için $10^n + 3.4^{n+2} + 5$, 9 ile bölündüğünü gösterin.

7- $x \in \mathbb{N}$, $x \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow 4^x + 6x - 1$ " " " .

8- $(1y8x2)_{10}$ sayısının 4 ve 9 ile bölünebilmesi için $x = ?$ $y = ?$

9- 6 tabanına göre yazılan bir sayının, 5 ve 7 ile bölünebilme kuralını bulun. Bundan yararlanarak $(21254)_6$ sayısının 5 ile bölümündeki kalanı bulun.

10- m tabanına göre yazılan bir sayının m-1 ile bölünebilme kuralını bulun.

Çözümler :

1- $(432561)_{10} = 1 + 6.10 + 5.10^2 + 2.10^3 + 3.10^4 + 4.10^5$

- $1 \equiv 1 \pmod{99}$.
- $10.6 \equiv 10.6 \pmod{99}$

  $10^2 \equiv 1 \pmod{99}$
- $5.10^2 \equiv 5 \pmod{99}$

  $10^3 \equiv 10 \pmod{99} \Rightarrow 2.10^3 \equiv 20 \pmod{99}$

  $10^4 \equiv 1 \pmod{99}$
- $3.10^4 \equiv 3 \pmod{99}$

  $10^5 \equiv 10 \pmod{99} \Rightarrow 4.10^5 \equiv 40 \pmod{99}$

$432561 \equiv 1 + 60 + 5 + 20 + 3 + 40 \pmod{99}$

$\equiv 129 \pmod{99} \equiv 30 \pmod{99}$

$$\begin{array}{r|l} 432561 & 99 \\ \hline 30 & \end{array}$$

2- $2373 \equiv 3 \pmod{10}$

$(2373)^2 \equiv 9 \pmod{10} \equiv (-1) \bmod 10$

$(2373)^4 \equiv (-1)^2 \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}$

$((2373)^4)^{106} 2373^3 \equiv 1^{106}(3.9) \pmod{10}$

$(2373)^{427} \equiv 7 \pmod{10}$

3- $19 \equiv 4 \pmod 5$ $\quad 288 \equiv 3 \pmod 5$

$19^2 \equiv 1 \pmod 5$ $\quad 288^2 \equiv 4 \pmod 5$

$19.19^2 \equiv 4 \pmod 5$

$19^3.288^2 \equiv 1 \pmod 5$

5- $7 / 3^{2n} - 2^n$?

$3 \equiv 3 \pmod 7$

$3^2 \equiv 2 \pmod 7$

$(3^2)^n \equiv 2^n \pmod 7$

$3^{2n} \equiv 2^n \pmod 7 \Rightarrow 3^{2n} - 2^n \equiv 2^n - 2^n \pmod 7 \Rightarrow 3^n - 2^n \equiv 0 \pmod 7$ //

6- $10^n + 3.4^{n+2} + 5$

$10^1 \equiv 1 \pmod 9$

$(10^1)^n \equiv 1^n \pmod 9 \Rightarrow 10^n \equiv 1 \pmod 9$

$3 \equiv 3 \pmod 9$ $\quad \boxed{4^n 4^2}$ $\quad 5 \equiv 5 \pmod 9$

$4 \equiv 4 \pmod 9 \Rightarrow 4^2 \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow 4^3 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 4^4 \equiv 4 \pmod 9 \Rightarrow 4^5 \equiv 7 \pmod 9$

$\Rightarrow 4^4 \equiv 1 \pmod 9$

a) $1 + 3.4.7 + 5 \pmod 9 \equiv a \Rightarrow a \equiv 0 \pmod 9$

b) $a \equiv 1 + 3.7.4 + 5 \equiv 0 \pmod 9$

c) $a \equiv 1 + 3.1.7 + 5 \equiv 0 \pmod 9$

7- $x \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow 9 / 4^x + 6x - 1$?

$x \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 7 + 9k$

$\Rightarrow 4^x + 6x - 1 = 4^{7+9k} + 6(7+9k) - 1$

$4^{7+9k} = 4^7 4^{9k} = 4^7 (4^9)^k$

$4 \equiv 4 \pmod 9$ $\quad \Rightarrow (4^9)^k = 4^{9k} \equiv 1^k \pmod 9 \equiv 1 \pmod 9$

$4^2 \equiv 7 \pmod 9$

$4^3 \equiv 1 \pmod 9$

$4^9 \equiv 1^9 \pmod 9 \Rightarrow 4^9 \equiv 1 \pmod 9$

$4^{7+9k} = 4^7.(4^9)^k \equiv 4 \pmod 9$

$6(7+9k) = 6.7+6.9k \equiv 6 \pmod 9$

$-1 \equiv -1 \pmod 9$

$4^x+6x-1 \equiv (4+6-1) \pmod 9$

$\equiv 0 \pmod 9$

9- $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1, x_0)_6$

$a = x_0 + x_1.6 + x_2.6^2 + \ldots + x_{n-1}6^{n-1} + x_n 6^n$

$x_0 \equiv x_0 \pmod 5$

$\left.\begin{array}{l} x_1 \equiv x_1 \pmod 5 \\ 6 \equiv 1 \pmod 5 \end{array}\right\} 6x_1 \equiv x_1 \pmod 5$

$6^2 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x_2 6^2 \equiv x_2 \pmod 5$

$\vdots$

$x_n 6^n \equiv x_n \pmod 5$ Taraf tarafa toplarsak,

$a \equiv (x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \pmod 5$

$a \equiv \sum_{i=0}^{n} x_i \pmod 5$ $5/a \Leftrightarrow 5/\sum_{i=0}^{n} x_i$ (a sayısının 5 ile bölünebilmesi için rakamları toplamı 5 ile bölünebilmelidir.)

m Modülüne Göre Denklemler :

$a, b \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$ax \equiv b \pmod m$ ifadesine m modülüne göre bir denklem denir. Bu ifade de, x yerine yazıldığında denklemi doğrulayan bir x_0 tamsayısına denklemin bir kökü (çözümü) denir. x_0 tamsayılarının kümesine denklemin doğruluk kümesi denir.

Teorem: $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. OBEB $(m,a) = d$ olmak üzere $ax \equiv b \pmod m$ denkleminin (önermesinin) doğruluk kümesinin boş kümeden farklı olması için gerek ve yeter şart, "d/b" olmasıdır.

İspat// OBEB $(m,a) = d \Rightarrow (d/m \wedge d/a)$

$\Rightarrow \exists a', m' \in \mathbb{Z},\ m = dm' \wedge a = d.a' \wedge (m', a') = 1$

$1^\circ \Rightarrow$: $D \neq \emptyset$ olsun. $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{Z},\ ax_0 \equiv b \pmod m$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ ax_0 = b + km$

$\Rightarrow da'x_0 = b + kdm'$

$\Rightarrow d(a'x_0 - km') = b \Rightarrow d/b$

2° $\Leftarrow$: $d/b \wedge OBEB(m,a) = d \Rightarrow [\exists u,v \in \mathbb{Z},\ d = mu + av \ \exists b' \in \mathbb{Z},\ b = db']$

$\Rightarrow b'd = mub' + ab'v$

$\Rightarrow b = m(ub') + a(b'v)$

$\Rightarrow a(b'v) - b = (-ub')m$

$\Rightarrow a(b'v) \equiv b \pmod{m} \Rightarrow x_0 = b'v \Rightarrow D \neq \emptyset$

Sonuç // $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $OBEB(m,a) = d$ olmak üzere $d \nmid b$ ise

$ax \equiv b \pmod{m}$ $\quad D = \emptyset$

Örnek // $5x \equiv 4 \pmod{12}$ $\quad \mathbb{Z}'$ de çözümünü araştıralım.

$a = 5 \quad b = 4 \quad m = 12$

$OBEB(5,12) = 1 \Rightarrow 1/4 \quad D \neq \emptyset$ olur. //

$\mathbb{Z}/12 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{11}\}$ bulunabilir.

$5(5x) = 5.4 \pmod{12} \Rightarrow 25x \equiv 20 \pmod{12}$

$\Rightarrow \begin{matrix} 25x \equiv x \pmod{12} \\ 20 \equiv 8 \pmod{12} \end{matrix} \Rightarrow x \equiv 8 \pmod{12} \quad x = \bar{8} \quad D = \bar{8}$

Örnek // $8x \equiv 2 \pmod{12}$ $\quad D = ?$

$a = 8 \quad b = 2 \quad m = 12$

$OBEB(8,12) = 4 \Rightarrow 4 \nmid 2 \quad D = \emptyset$ olur. // ($\mathbb{Z}'$de çözümü yoktur.)

Örnek 1 // $36x \equiv 8 \pmod{102}$ denkleminin $\mathbb{Z}/102$ deki çözümü nedir?

2 // $2x \equiv 3 \pmod{5}$ " $\mathbb{Z}/5$ " " " ?

3 // $5x \equiv 7 \pmod{12}$ ve $12x \equiv 9 \pmod{15}$, $\mathbb{Z}$'deki çözümü nedir?

Çözüm 1 // $36x \equiv 8 \pmod{102}$

$OBEB(36,102) = 6 \quad 6 \nmid 8 \quad D = \emptyset$

2 // $OBEB(2,5) = 1 \quad 1/3 \quad D \neq \emptyset$

$\mathbb{Z}/5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$\overline{2x} = \bar{3} \Rightarrow 2 \odot \bar{x} \overset{?}{=} 3 \quad x = \bar{4} \quad D = \bar{4}$

3 // $12x \equiv 9 \pmod{15}$

$OBEB(12,15) = 3 \quad 3/9 \quad D \neq \emptyset \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 12x = 9 + 15k$

$\Rightarrow 3.4x = 3.3 + 3.5k$

$\Rightarrow 4x = 3 + 5k$

$\Rightarrow 4x \equiv 3 \pmod{5}$

$\Rightarrow 4.4x \equiv 3.4 \pmod 5$

$\Rightarrow 16x \equiv 2 \pmod 5 \quad \Rightarrow x = 2 \pmod 5 \quad D = \overline{2}$

– RASYONEL SAYILAR –

Tanım: $K = \{(a,b) : a,b \in Z \wedge b \neq 0\}$ kümesinin herbir (a,b) elemanına bir kesir, a : (a,b) kesrinin payı, b : (a,b) kesrinin paydası denir.

Tanım: $(a,b), (c,d) \in K$ için $ad = bc$ ise (a,b) kesri (ikilisi), (c,d) kesrine denktir denir ve $(a,b) \sim (c,d)$ yazılır.

Örnek // $(1,2)$ ve $(3,6)$ kesirleri $1.6 = 6 = 2.3$ denktir.

$(1,2) \sim (3,6)$

Teorem: K kümesinde tanımlanan $(a,b), (c,d) \in K$ için,

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat // 1° $a,b \in Z$, $ab = ba \Rightarrow (a,b) \sim (a,b)$ (yansıma öz.), $(a,b) \in K$

2° $(a,b), (c,d) \in Z$, $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = bc$

$\Rightarrow bc = ad$

$\Rightarrow cb = da$

$\Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$ (simetri öz.)

3° $(a,b), (c,d), (e,f) \in K$,

$[(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f)] \Rightarrow [ad = bc \wedge cf = de]$

$\Rightarrow (ad)(cf) = (bc)(de)$

$\Rightarrow (af)(cd) = (be)(cd)$

$\Rightarrow af = be \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$ (geçişme öz.)

$\forall (a,b) \in K$ nın bir denklik sınıfı vardır.

$\forall (a,b) \in K$ için $\overline{(a,b)} = \{(x,y) : (x,y) \in K \wedge (x,y) \sim (a,b)\}$

Örnek // $(0,1), (1,2), (3,2)$ denklik sınıflarını bulalım.

- $\overline{(0,1)} = \{(x,y) : (x,y) \in K \wedge (x,y) \sim (0,1)\}$

$(x,y) \sim (0,1) \Rightarrow x.1 = y.0 \Rightarrow x = 0$

$\overline{(0,1)} = \{(0,x) : x \in Z - \{0\}\}$

$\overline{(0,1)} = \{\ldots (0,-2), (0,-1), (0,1), (0,2) \ldots\}$

- $(\overline{1,2}) = \{(x,y) : (x,y) \in K \wedge (x,y) \sim (1,2)\}$

$$(x,y) \sim (1,2) \Rightarrow x.2 = y.1 \Rightarrow y = 2x$$

$$= \{(x,2x) : x \in Z - \{0\}\}$$

$$= \{\ldots (-3,-6), (-2,-4), (-1,-2), (1,2), (2,4), (3,6), \ldots\}$$

- $(\overline{3,2}) = \{(x,y) : (x,y) \in K \wedge (x,y) \sim (3,2)\}$

$$(x,y) \sim (3,2) \Rightarrow x.2 = y.3 \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow 2/y \wedge 3/x$$

$$= \{(3x,2x) : x \in Z - \{0\}\}$$

$$= \{\ldots, (-6,-4), (-3,-2) (3,2), (6,4), \ldots\}$$

Tanım: K'da tanımlanan denk olma denklik bağıntısının K dan ayırdığı denklik sınıflarının herbirine bir rasyonel sayı, bu sayıların kümesine de rasyonel sayılar kümesi denir. Q ile gösterilir.

Örnek// $(\overline{2,3}), (\overline{3,2}), (\overline{11,5})$ rasyonel sayılardır.

Sonuç (eşitlik): $(\overline{a,b}), (c,d) \in Q$ olsun.

$$(\overline{a,b}) = (\overline{c,d}) \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Teorem: $(\overline{a,b}) \in Q$ olsun. $x \in Z - \{0\}$ olmak üzere,

$$(\overline{a,b}) = (\overline{ax,bx})$$

İspat// $(\overline{a,b}) = (\overline{ax,bx}) \Leftrightarrow (a,b) \sim (ax,bx) \Leftrightarrow a(bx) \overset{?}{=} b(ax)$

$$\Leftrightarrow abx = bax$$

$$\Leftrightarrow (ax,bx)$$

Tanım: (Toplama İşlemi):

$$+ : Q \times Q \longrightarrow Q$$

$$[(\overline{a,b}), (\overline{c,d})] \longrightarrow (\overline{a,b}) + (\overline{c,d}) = (\overline{ad+bc, bd})$$

Tanım: (Çarpma İşlemi):

$$\cdot : Q \times Q \longrightarrow Q$$

$$[(\overline{a,b}), (\overline{c,d}) \longrightarrow (\overline{a,b}) \cdot (\overline{c,d}) = (\overline{ac, bd})$$

Teorem: $(Q, +, \cdot)$ matematik yapısı bir cisimdir.

1° $(Q,+)$ Abel grubudur.

2° $(Q - \{0\}, \cdot)$ " " 3° $\cdot$ nın $+$ üzerine dağılma özelliği vardır.

İspat // I- $(Q,+)$ abel grubudur.

1- Q, $+$ işlemine göre kapalıdır.

2- $(\overline{a,b}),(\overline{c,d}) \in Q$ için

(+) işleminin değ. öz.

$$(\overline{a,b})+(\overline{c,d}) = (\overline{ad+bc,bd}) = (\overline{da+cb,db}) = (\overline{cb+da,db}) = (\overline{c,d})+(\overline{a,b})$$

3- Birleşme özelliği vardır.

4- Birim eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q \wedge \exists (\overline{x,y}) \in Q$ için

$$(\overline{a,b})+(\overline{x,y}) = (\overline{x,y})+(\overline{a,b}) = (\overline{a,b}) \ , \ e = (\overline{x,y}) = ?$$

$$(\overline{a,b})+(\overline{x,y}) = (\overline{a,b}) \Rightarrow (\overline{ay+bx,by}) = (\overline{a,b}) \quad ((+) \text{ işl. tanımı.})$$

$$\Rightarrow (ay+bx,by) \sim (a,b) \quad (\text{eşitlik tanımı})$$

$$\Rightarrow (ay+bx)b = (by)a \quad (\text{eşitlik } '')$$

$$\Rightarrow \cancel{ayb}+b^2x = \cancel{bya} \quad (+ \text{ işl. sadel. öz})$$

$$\Rightarrow b^2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow e = (\overline{0,y}) \in Q$$

5- Ters eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q$ için $(\overline{a,b})+(\overline{-a,b}) = (\overline{ab-ba,bb}) = (\overline{0,y}) = e$

$$(\overline{-a,b})+(\overline{a,b}) = (\overline{0,y})$$

$$-(\overline{a,b}) = (\overline{-a,b}) \in Q$$

II- $(Q-\{0\},\cdot)$ yapısı bir abel grubudur. $[0=(\overline{0,y})]$

1- Kapalılık öz. 2- Birleşme öz.

3- Değişme öz. $\forall (\overline{a,b}) \wedge (\overline{c,d}) \in Q$ için

$$(\overline{a,b})\cdot(\overline{c,d}) = (\overline{ac,bd}) = (\overline{ca,db}) = (\overline{c,d})\cdot(\overline{a,b})$$

4- Birim eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q-\{0\}$ için $(\overline{a,b})(\overline{x,y}) = (\overline{x,y})(\overline{a,b}) = (\overline{a,b})$, $e = (\overline{x,y})$

$$\Rightarrow (\overline{a,b})(\overline{x,y}) = (\overline{a,b}) \Rightarrow (\overline{ax,by}) = (\overline{a,b})$$

$$\Rightarrow (\overline{ax,by}) \sim (\overline{a,b})$$

$$\Rightarrow (ax)b = (by)a$$

$$\Rightarrow (ab)x = (ab)y \Rightarrow x = y \Rightarrow e = (\overline{x,x}) \wedge x \neq 0$$

5° Ters eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q$ için

$$(\overline{a,b})(\overline{b,a}) = (\overline{ab,ba}) = (\overline{x,x})$$

$$(a,b)^{-1} = (\overline{b,a})$$

İspat // I- $(Q,+)$ abel grubudur.

1- Q, $+$ işlemine göre kapalıdır.

2- $(\overline{a,b}),(\overline{c,d}) \in Q$ için

(+) işleminin değ. öz.

$$(\overline{a,b})+(\overline{c,d}) = (\overline{ad+bc,bd}) = (\overline{da+cb,db}) = (\overline{cb+da,db}) = (\overline{c,d})+(\overline{a,b})$$

3- Birleşme özelliği vardır.

4- Birim eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q \wedge \exists (\overline{x,y}) \in Q$ için

$$(\overline{a,b})+(\overline{x,y}) = (\overline{x,y})+(\overline{a,b}) = (\overline{a,b}) \ , \ e = (\overline{x,y}) = ?$$

$$(\overline{a,b})+(\overline{x,y}) = (\overline{a,b}) \Rightarrow (\overline{ay+bx,by}) = (\overline{a,b}) \quad ((+) \text{ işl. tanımı.})$$

$$\Rightarrow (ay+bx,by) \sim (a,b) \quad (\text{eşitlik tanımı})$$

$$\Rightarrow (ay+bx)b = (by)a \quad (\text{eşitlik } '')$$

$$\Rightarrow \cancel{ayb}+b^2x = \cancel{bya} \quad (+ \text{ işl. sadel. öz})$$

$$\Rightarrow b^2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow e = (\overline{0,y}) \in Q$$

5- Ters eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q$ için $(\overline{a,b})+(\overline{-a,b}) = (\overline{ab-ba,bb}) = (\overline{0,y}) = e$

$$(\overline{-a,b})+(\overline{a,b}) = (\overline{0,y})$$

$$-(\overline{a,b}) = (\overline{-a,b}) \in Q$$

II- $(Q-\{0\},\cdot)$ yapısı bir abel grubudur. $[0=(\overline{0,y})]$

1- Kapalılık öz. 2- Birleşme öz.

3- Değişme öz. $\forall (\overline{a,b}) \wedge (\overline{c,d}) \in Q$ için

$$(\overline{a,b})\cdot(\overline{c,d}) = (\overline{ac,bd}) = (\overline{ca,db}) = (\overline{c,d})\cdot(\overline{a,b})$$

4- Birim eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q-\{0\}$ için $(\overline{a,b})(\overline{x,y}) = (\overline{x,y})(\overline{a,b}) = (\overline{a,b}) \ , \ e = (\overline{x,y})$

$$\Rightarrow (\overline{a,b})(\overline{x,y}) = (\overline{a,b}) \Rightarrow (\overline{ax,by}) = (\overline{a,b})$$

$$\Rightarrow (\overline{ax,by}) \sim (\overline{a,b})$$

$$\Rightarrow (ax)b = (by)a$$

$$\Rightarrow (ab)x = (ab)y \Rightarrow x = y \Rightarrow e = (\overline{x,x}) \wedge x \neq 0$$

5° Ters eleman öz. $\forall (\overline{a,b}) \in Q$ için

$$(\overline{a,b})(\overline{b,a}) = (\overline{ab,ba}) = (\overline{x,x})$$

$$(a,b)^{-1} = (\overline{b,a})$$

III - Dağılma öz. ($\cdot$ nn + üzerine) (Ödev)

$\forall (\overline{a,b}), (\overline{c,d}), (\overline{e,f}) \in Q$ için,

$(\overline{a,b}) \cdot [(\overline{c,d}) + (\overline{e,f})] \overset{?}{=} (\overline{a,b})(\overline{c,d}) + (\overline{a,b})(\overline{e,f})$

$[(\overline{a,b}) + (\overline{c,d})](\overline{e,f}) \overset{?}{=} (\overline{a,b})(\overline{e,f}) + (\overline{c,d})(\overline{e,f})$

Sonuç // $(Q, +, \cdot)$ yapısı bir cisimdir. Bu cisme rasyonel sayılar cismi denir.

Örnek // $(\overline{3,2})$ rasyonel sayısının 2 ve -2 katını bulalım.

$2(\overline{3,2}) = (\overline{3,2}) + (\overline{3,2}) = (\overline{3.2+2.3, 2.2}) = (\overline{12,4}) = (\overline{3.4, 1.4}) = (\overline{3,1})$

$-2(\overline{3,2}) = 2[-(\overline{3,2})] = [-(\overline{3,2})] + [-(\overline{3,2})] = (\overline{-3,2}) + (\overline{-3,2})$

$= (\overline{(-3)2 + 2(-3), 2.2}) = (\overline{-12,4}) = (\overline{-3,1})$

Örnek // $(\overline{3,2})$ rasyonel sayısının 2. ve -2. kuvvetlerini bulalım.

$(\overline{3,2})^2 = (\overline{3,2})(\overline{3,2}) = (\overline{3.3, 2.2}) = (\overline{9,4})$

$(3,2)^{-2} = [(\overline{3,2})^{-1}]^2 = (\overline{2,3})^2 = (\overline{2,3})(\overline{2,3}) = (\overline{4,9})$

Teorem: $T = \{(\overline{a,1}) : a \in Z\}$ olmak üzere T ve Z izomorftur. $T \subset Q$

İspat // $f : T \longrightarrow Z$

$(\overline{a,1}) \longrightarrow f[(\overline{a,1})] = a$

fonksiyonu tanımlanıyor.

1° $\forall (\overline{a,1}), (\overline{b,1}) \in T$ için,

$f[(\overline{a,1}) + (\overline{b,1})] = f[(\overline{a.1 + 1.b = 1.1})] = f[(\overline{a+b,1})] = a+b = f[(a,1)] + f[(b,1)]$

2° (Ödev) $f[(\overline{a,1}) . (\overline{b,1})] = f(\overline{a,1}) . f(\overline{b,1})$

3° $\forall (\overline{a,1}), (\overline{c,1}) \in T$ için $f[(\overline{a,1})] = f[(\overline{b,1})] \Rightarrow a = b \Rightarrow (\overline{a,1}) = (\overline{b,1})$ f, 1:1 dir.

4° $\forall a \in Z$, $f(\overline{a,1}) = a$ $(\overline{a,1}) \in T$ f örtendir.

$T \sim Z$ 'dir (T izomorf Z)

$(\overline{a,1}) = a$

$(\overline{0,1}) = 0$ $(\overline{1,1}) = 1$

Tanım: (Çıkarma işleni):

$(\overline{a,b}), (\overline{c,d}) \in Q$ için,

$(\overline{a,b}) + (\overline{-c,d})$ rasyonel sayısına $(\overline{a,b})$ ve $(\overline{c,d})$ rasyonel sayılarının farkı denir.

$(\overline{a,b}) + (\overline{-c,d}) = (\overline{a,b}) + [-(\overline{c,d})] = (\overline{ad-bc, bd})$

Tanım: (Bölme İşlemi):

$(\overline{a,b}) \in Q$ ve $(\overline{c,d}) \in Q-\{0\}$ için

$(\overline{a,b})(\overline{c,d})^{-1}$ rasyonel sayısına $(\overline{a,b})$ nin $(\overline{c,d})$ ile bölümü denir.

$(\overline{a,b})(\overline{c,d})^{-1} = (\overline{a,b})(\overline{d,c}) = (\overline{ad,bc})$

Sembolik Olarak:

Fark: $(\overline{a,b}) - (\overline{c,d}) = (\overline{a,b}) + (\overline{-c,d}) = (\overline{ad-bc,bd})$

Bölme: $(\overline{a,b}) : (\overline{c,d}) = (\overline{a,b}).(\overline{d,c}) = (ad,bc)$

(Ödev) 1° $(\overline{-2,3}) - (\overline{5,4}) = ?$, $(\overline{-2,3}) : (\overline{5,4}) = ?$

- $(\overline{-2,3}) - (\overline{5,4}) = (\overline{-2,3}) + (\overline{-5,4}) = (\overline{(-2)4.+3.(-5),3.4}) = (\overline{-23,12})$
- $(\overline{-2,3}) : (\overline{5,4}) = (\overline{-2,3}).(\overline{4,5}) = (\overline{(-2)4,3.5}) = (\overline{-8,15})$

Tanım: $a \in Z$ olduğuna göre $(\overline{a,1})$ rasyonel sayısına tam rasyonel sayı denir.

Ve $(\overline{a,1}) = a$ diye gösterilir.

Buna göre $Z \subset Q$ olur.

$(\overline{a,b})$ rasyonel sayısını da $\frac{a}{b}$ ile gösteririz. $(\overline{a,b}) = \frac{a}{b}$

Teorem: $a,b \in Z$ ve b/a ise $a:b = \frac{a}{b}$

İspat // $a:b = (\overline{a,1}):(\overline{b,1}) = (\overline{a,1}).(\overline{1,b}) = (\overline{a,b}) = \frac{a}{b}$

Tanım: $x,y \in Q$ ve $y \neq 0$ ise $x:y = \frac{x}{y}$ olarak tanımlanır.

Teorem: $\forall x,y,z,w \in Q$ için

a- $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw+yz}{yw}$ b- $\frac{x}{y} . \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$ c- $\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{xw-yz}{yw}$

d- $\frac{x}{y} : \frac{z}{w} = \frac{xw}{yz}$

- Rasyonel Sayıların Bir Doğru Üzerinde Gösterimi -

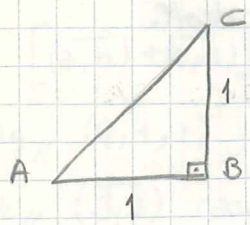
$\frac{p}{q}$. $p>0$, $q>0$ $p,q \in Z^+$

Bir birimi q parçaya bölelim. 1br Her parça uzunluğu $\frac{1}{q}$ olur.

$p\frac{1}{q} = \frac{p}{q}$

Sayı doğrusu üzerinde rasyonel sayılara karşılık gelmeyen nokta var mıdır?

İspat// Aksine İspat için bir örnek verelim.



$\overline{AC}^2 = 2$ $\qquad$ $\overline{AC} = x \Rightarrow x^2 = 2$

Soru: $x^2 = 2$ olan x sayısı rasyonel midir?

Kabul edelim ki x rasyonel sayı olsun. $\Rightarrow x = \frac{p}{q} \wedge \exists p, q \in \mathbb{Z} \wedge (p,q) = 1$

$\frac{p}{q} = (\overline{p,q}) \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2/p^2 \Rightarrow 2/p$

$\Rightarrow \exists p_1 \in \mathbb{Z},\ p = 2p_1$

$\Rightarrow (2p_1)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4p_1^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p_1^2 = q^2 \Rightarrow 2/q^2 \Rightarrow 2/q$

$\Rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z},\ q = 2q_1$

$\Rightarrow OBEB(p,q) = OBEB(2p_1, 2q_1) = 2\ OBEB(p_1, q_1) \neq 1 \Rightarrow (p,q) \neq 1$

Sonuç//: x rasyonel değildir.

Sayı doğrusu üzerinde rasyonel olmayan noktalar da vardır.

– Rasyonel Sayılar Kümesinde Sıralama –

Teorem: $x \in \mathbb{Q}$ ve $x = (\overline{a,b}) = (\overline{c,d})$ olsun. $ab > 0$ ise $cd > 0$ dır.

İspat// $(\overline{a,b}) = (\overline{c,d}) \Rightarrow (a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow (ad)(ad) = (bc)(ad)$

$\Rightarrow (ad)^2 = (bc)(ad) \wedge ab > 0 \Rightarrow (ad)^2 = (ab)(cd) \wedge ab > 0 \Rightarrow cd > 0$

Tanım: $x = (\overline{a,b}) \in \mathbb{Q}$ olsun.

1° $ab > 0$ ise x sayısına pozitif rasyonel sayı denir. Ve $x > 0$ yazılır.

2° $ab < 0$ ise " " negatif " " " . Ve $x < 0$ yazılır.

Pozitif rasyonel sayıların kümesi, $\mathbb{Q}^+$,

Negatif " " " , $\mathbb{Q}^-$ ile gösterilir.

Tanım: $x \in \mathbb{Q}$ olsun.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{eşitliğiyle belirir.}$$

$|x|$ sayısına, x rasyonel sayısının mutlak değeri denir.

Tanım: $a, b \in Q$ olsun. $a+x=b$ olacak şekilde bir x pozitif rasyonel sayısı varsa, "a sayısı b sayısından küçüktür" denir ve $a<b$ şeklinde yazılır.

$b=a+x$ olacak şekilde bir x pozitif rasyonel sayısı varsa, "b rasyonel sayısı, a rasyonel sayısından büyüktür" denir ve $b>a$ şeklinde yazılır.

Eğer $a<b$ veya $a=b$ önermesi doğru ise bu durum kısaca, $a \leq b$ şeklinde (yazılır.) sembolik olarak gösterilir.

Eğer $a>b$ veya $a=b$ önermesi de doğru ise $a \geq b$ şeklindedir.

Tanım: $a, b \in Q$ için $a<b$, $a>b$, $a \leq b$, $b \geq a$ önermelerine, rasyonel sayılar kümesinde birer eşitsizlik denir.

Teorem: $a, b \in Q$ olsun. $a \leq b \iff b-a \in Q^+$

İspat // $1^0 \Rightarrow$: $a \leq b \Rightarrow \exists x \in Q^+,\ a+x=b \vee a=b$

$\Rightarrow x=b-a \in Q^+$

$2^0 \Leftarrow$: $b-a \in Q^+ \Rightarrow x=b-a \in Q^+ \Rightarrow a+x=b,\ x \in Q^+ \Rightarrow a \leq b$

Teorem: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff ad > bc \quad (a, b \in Z \wedge c, d \in Z^+)$

İspat // $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff \frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0 \iff \frac{ad-bc}{bd} > 0 \iff ad-bc > 0$

$\iff ad > bc$

Teorem: $\forall x, y, z, w \in Q$ için

a) $x \geq x$

b) $(x \geq y \wedge y \geq z) \Rightarrow x \geq z$

$(x > y \wedge y > z) \Rightarrow x > z$

c) $x \geq y \vee y \geq x$

d) $(x \geq y \wedge y \geq x) \Rightarrow x = y$

e) $x>y$, $y>x$, $x=y$ önermelerinden ancak birisi doğrudur.

f) $x+1 > x$

g) $x \geq y \iff x+z \geq y+z$, $x>y \iff x+z > y+z$

h) $(x \geq y \wedge z \geq w) \Rightarrow x+z \geq y+w$, $(x \geq y \wedge z > w) \Rightarrow x+z > y+w$

i- $\forall z_1 \in Q^+ \ (x \geq y \iff xz \geq yz)$

k- $\forall z_1 \in Q^- \ (x \geq y \iff xz \leq yz)$

İspat// $(x>y \wedge y>z) \overset{?}{\Rightarrow} x>z$

$(x>y \wedge y>z) \Rightarrow (\exists k \in Q^+, x=y+k) \wedge (\exists r \in Q^+, y=z+r)$

$\Rightarrow x=y+k=(z+r)+k$

$\Rightarrow x=z+(r+k)$, $r+k \in Q$

$\Rightarrow x>z$

Tanım: $x,y,z \in Q$ olsun. Eğer "$x<y<z$ veya $z<y<x$" önermesi doğru ise "y rasyonel sayısı x ve z rasyonel sayıları arasındadır" denir.

Teorem: Farklı iki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel sayı vardır.

İspat// $\forall x,y \in Q$ ve $x \neq y$ olsun. $x<y$ olduğunu farzedelim.

$\Rightarrow z=\frac{x+y}{2}$ alalım. $\Rightarrow z \in Q$

$x<y \Rightarrow x+x<x+y$

$\Rightarrow 2x<x+y$

$\Rightarrow x<\frac{x+y}{2} \Rightarrow x<z$

$x<y \Rightarrow x+y<y+y$

$\Rightarrow x+y<2y$

$\Rightarrow \frac{x+y}{2}<y \Rightarrow z<y$

$x<z \wedge z<y \Rightarrow x<z<y$

Sonuç: Farklı iki rasyonel sayı arasında, birbirinden farklı, sonsuz tane rasyonel sayı vardır.

Tanım: $x \in Q$ ve $n \in Z^+$ olsun.

1° $x \neq 0$ ise $x^0=1$

2° $x \neq 0$ ise $x^1=x$

3° $x \neq 0$ ise $x^{n+1}=x^n.x$

4° $x \neq 0$ ise $x^{-n}=(x^{-1})^n$

Teorem: $x,y \in Q$ ve $m,n \in Z^+$ olsun.

1° $(xy)^n=x^n y^n$

2° $y \neq 0$ ise $\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$

3° $x^n.x^m=x^{n+m}$

4° $n \geq m$ ve $x \neq 0$ ise $\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$

5° $(x^n)^m=x^{nm}$

İspat// $(xy)^n = \overbrace{(xy)(xy)\ldots\ldots(xy)}^{n\text{ tane}} = (\underbrace{x.x\ldots x}_{n\text{ tane}})(\underbrace{y.y\ldots y}_{n\text{ tane}}) = x^n.y^n$

Teorem: $x, y \in Q$ ve $n \in Z^+$ olsun.

$$x^n = y^n \Rightarrow [(x=y) \vee (x=-y)]$$

İspat// $x = \frac{a}{b} \wedge y = \frac{c}{d}$ olsun. $(a, b, c, d \in Z)$

$$\Rightarrow x^n = y^n \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$$

$$\Rightarrow a^n d^n = c^n b^n$$

$$\Rightarrow (ad)^n = (cb)^n$$

$$\Rightarrow |(ad)^n| = |(cb)^n|$$

$$\Rightarrow |ad|^n = |cb|^n$$

$$\Rightarrow |ad| = |bc|$$

$$\Rightarrow (ad = bc) \vee (ad = -bc) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \vee \left(\frac{a}{b} = -\frac{c}{d}\right)$$

$$\Rightarrow (x = y \vee x = -y)$$

Teorem: $a \in Q$ ve $n \in Z^+$ olsun. n çift ise $x^n = a$ olacak şekilde bir x rasyonel sayısı yoktur.

$x \in Q$ ve n çift $\Rightarrow x^n \geq 0$, $a < 0$ olduğundan $\forall x \in Q$, $x^n \neq a$ önermesi doğrudur. $\Rightarrow \exists x \in Q$, $x^n = a$ önermesi yanlıştır.

Tanım: $a \in Q$ ve $n \in Z^+$ olsun.

a) n tek sayı olmak üzere $x^n = a$ denklemini sağlayan x rasyonel sayısı varsa bu sayıya a'nın n. kuvvetten kökü denir ve

$x = \sqrt[n]{a}$ veya $x = a^{1/n}$ olarak yazılır.

b) n çift sayı olmak üzere ve $a \geq 0$ olmak üzere $x^n = a$ denklemini sağlayan pozitif bir x rasyonel sayısı varsa bu sayıya a'nın n. kuvvetten pozitif kökü denir. Ve $x = \sqrt[n]{a}$ veya $x = a^{1/n}$ yazılır.

c) n çift sayı olmak üzere ve $a \geq 0$ için, $x^n = a$ denklemini sağlayan negatif bir x rasyonel sayısı varsa bu sayıya a'nın n. kuvvetten negatif kökü denir.

Örnek 1// $n=3$ ise $\sqrt[3]{a}$ a'nın küp kökü

2// $n=2$ ise $\sqrt[2]{a}$ a'nın kare kökü

3// $(-2)^3=-8 \Rightarrow \sqrt[3]{-8}=-2$

4// $3^2=9 \Rightarrow \sqrt{9}=3$ pozitif karekök

5// $(-3)^2=9 \Rightarrow \sqrt{9}=(-3)$ negatif "

Teorem: $a\in Q$ ve $n\in Z^+$ olmak üzere $x^n=a$ denkleminin Q'daki doğruluk kümesi D olsun.

a) n tek sayı ve $D\neq\emptyset$ ise $D=\{\sqrt[n]{a}\}$

b) n çift sayı ve $D\neq\emptyset$ ise $D=\{\sqrt[n]{a},-\sqrt[n]{a}\}$

Tanım: $m,n\in Z^+$ ve $b\in Q$ olsun.

$$b^{m/n}=(b^{1/n})^m=\sqrt[n]{b^m}$$

Örnek// $16^{3/2}=(16^{1/2})^3=(\sqrt{16})^3=4^3=64$

Teorem: $\forall x,y,z\in Q$ için

a) $x^z.y^z=(xy)^z$ b) $\frac{x^z}{y^z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z$ c) $x^y.x^z=x^{y+z}$ d) $\frac{x^y}{x^z}=x^{y-z}$ $y>0$

e) $(x^y)^z=x^{yz}$

Rasyonel Sayıların Ondalık Gösterimi

$a,b\in Z^+$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısı verilsin.

1° $\Rightarrow a=bq+r \wedge 0\leq r<b$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{bq+r}{b}=q+\frac{r}{b}$ $0\leq r<b$

2° $\frac{r}{b}$ ifadesinde $10r=bq_1+r_1 \wedge 0\leq r<b$

$\Rightarrow \frac{r}{b}=\frac{10r}{10b}=\frac{bq_1+r_1}{10b} \Rightarrow \frac{r}{b}=\frac{q_1}{10}+\frac{r_1}{10b}$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=q+\frac{q_1}{10}+\frac{r_1}{10b}$

3° $10r_1=bq_2+r_2 \wedge 0\leq r_2<b$

$\frac{r_1}{10b}=\frac{10r_1}{100b}=\frac{bq_2+r_2}{100b} \Rightarrow \frac{r_1}{10b}=\frac{q_2}{100}+\frac{r_2}{100b}$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=q+\frac{q_1}{10b}+\frac{q_2}{10^2}+\frac{r_2}{100b}$

4° $\frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \frac{r_3}{10^3 b}$

$$\frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \dots + \frac{q_i}{10^i} + \dots$$

Tanım: $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının bu şekilde yazımına ondalık gösterimi (açılımı) denir. Ve sembolik olarak $\frac{a}{b} = q.q_1 q_2 \dots q_i \dots$ şeklinde gösterilir.

Örnek// $\frac{27}{8}$ sayısının ondalık gösterimini yazalım.

1° $27 = 8.3 + 3 \Rightarrow \frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{8}$

2° $30 = 10.3 = 8.3 + 6 \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{8.3+6}{8.10} = \frac{3}{10} + \frac{6}{10.8}$

$$\frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{10} + \frac{6}{10.8}$$

3° $60 = 8.7 + 4 \Rightarrow \frac{6}{10.8} = \frac{7}{100} + \frac{4}{10^2.8}$ $\qquad \frac{a}{b} = \frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{4}{10^2.8}$

4° $40 = 8.5 + 0 \Rightarrow \frac{4}{10^2.8} = \frac{8.5+0}{10^3.8} = \frac{5}{10^3} + \frac{0}{10^3.8}$

$$\frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{0}{10^5}$$

$$= 3,375000\dots = 3,375$$

Tanım: Herhangi bir rasyonel sayının ondalık gösterimi $(q, q_1, q_2, \dots, q_k \dots p_1, p_2, \dots, p_n, p_1, p_2, \dots, p_n, p_1, p_2, \dots, p_n \dots)$ şeklinde ise bu gösterime devirli ondalık gösterim denir.

$(q_1 q_2 q_3 \dots q_k)_{10}$ sayısına ondalık gösterimin devretmeyen kısmı,

$(p_1 p_2 p_3 \dots p_n)_{10}$ " " " devreden kısmı denir ve

sembolik olarak $q, q_1 q_2 \dots q_k \overline{p_1 p_2 \dots p_n}$ şeklinde gösterilir.

Örnek// $0,8\overline{3} = 0,83333\dots$

Teorem: Her rasyonel sayının ondalık gösterimi devirlidir. Her bir devirli ondalık gösterim bir rasyonel sayıya eşittir.

İspat// 1° $\frac{a}{b} \in Q$, $a, b \in Z^+ \Rightarrow \frac{a}{b} = r, r_1 r_2 \dots r_n \dots$ olsun.

$r, r_1, r_2, \dots r_n$ sayıları a'nın b'ye bölümündeki kalanlardır.

$\Rightarrow$ bu kalanlardan en çok b tanesi farklıdır.

$\frac{a}{b} = r, \underbrace{r_1 r_2 \dots r_i}_{\text{farklı ise}} r_{i+1} \dots r_n$ sonuç: $\frac{a}{b}$ nin ondalık gösterimi devirlidir.

2° $\Leftarrow$: $X = q_1 q_2 \ldots q_k \overline{p_1 p_2 \ldots p_n}$ olsun $\Rightarrow X \overset{?}{\in} Q$

$$10^{k+n} \cdot X = q_1 q_2 \ldots q_k p_1 p_2 \ldots p_n , p_1 p_2 \ldots p_n$$

$$10^{k+n} \cdot X = 10^{k+n} \cdot q + (q_1 q_2 \ldots q_k p_1 p_2 \ldots p_n)_{10} + 0,\overline{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

$$10^k \cdot X = q_1 q_2 \ldots q_k , \overline{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

$$10^k X = 10^k q + (q_1 q_2 \ldots q_k)_{10} + 0,\overline{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

$$\Rightarrow (10^{k+n} - 10^k) X = (10^{k+n} - 10^k) q + (q_1 q_2 \ldots q_k p_1 p_2 \ldots p_n)_{10} - (q_1 q_2 \ldots q_k)_{10}$$

$$\Rightarrow X = \frac{(10^{k+n} - 10^k) q + (q_1 q_2 \ldots q_k p_1 p_2 \ldots p_n)_{10} - (q_1 q_2 \ldots q_k)_{10}}{10^{k+n} - 10^k} \in Q$$

Örnek // $X = 2,13\overline{142}$ ondalık gösterimini rasyonel olarak yazalım.

$$10^5 X = 213142,\overline{142}$$

$$10^5 X = 10^5 . 2 + 13142 + 0,142$$

$$10^2 X = 213,\overline{142} = 10^2 . 2 + 13 + 0,142$$

$$10^5 X - 10^2 X = (10^5 - 10^2) 2 + 13142 - 13$$

$$\Rightarrow X = \frac{(10^5 - 10^2) 2 + 13142 - 13}{10^5 - 10^2} = \frac{2 . 99900 + 13129}{99900} = 2 + \frac{13129}{99900} //$$

Problemler:

1 - $(74,185)$ kesrine denk olan öyle bir (x,y) kesri bulun ki, $x+y = 21$ olsun.

2 - $((1110)_2 , (11)_2)$ kesri $((101010)_2 , (1001)_2)$ kesrine denk midir?

3 - $(\overline{2,1}) + x = (\overline{0,3})$, $(\overline{2,5}) . x = (\overline{3,1})$ açık önermelerinin Q daki doğruluk kümeleri ?

4 - $\dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}}}}}$ rasyonel sayısını $\frac{p}{q}$ şeklinde yazın.

5 - $3.(\overline{2,5})(\overline{2,-5})$, $(\overline{1,-2})^3$ ifadelerini bulun.

6 - $\frac{3}{8}$, $-\frac{11}{9}$, $-\frac{33}{7}$ sayılarının ondalık gösterimini bulun.

7 - $2,4$; $2,125$; $1,23\overline{157}$; $3,265180051805180 05 \ldots$ sayılarını p/q şeklinde yazın.

8 - a/ $x^7 = 0$ b/ $x^{-3} = \frac{27}{8}$ c/ $x^{-6} = 10^6$ d/ $x^5 = 1$ e/ $x^7 = 0$

f/ $(2x)^4 = 16$ g) $(x+1)^2 = 4$ h) $(x-1)^4 = 1$ ı) $3x^4 + 81 = 162$

açık önermelerinin Q daki doğruluk kümelerini bulun.

9- $\sqrt[3]{-1}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[3]{-8}$ $4^{3/2}$ $\left(\frac{1}{27}\right)^{1/3}$ $\left(-\frac{1}{16}\right)^{-3/4}$ sayılarını en basit şekilde yazın.

Çözümler :

1- $(74,185) \sim (x,y)$ $\quad x+y=21$

$74y = 185x \Rightarrow 2.37y = 5.37x$

$\Rightarrow 2y = 5x \wedge x+y=21$

$\Rightarrow (x,y) = (6,15)$

3- $(\overline{2,1}) + x = (\overline{0,3})$ $\quad x = (\overline{a,b})$

$(\overline{2,1}) + (\overline{a,b}) = (\overline{0,3}) \Leftrightarrow (\overline{a,b}) = (\overline{0,3}) + (\overline{-2,1})$

$\Leftrightarrow (\overline{a,b}) = x = (\overline{0.1+3(-2),\ 3.1})$

$\Leftrightarrow x = (\overline{-6,3}) = (\overline{-2,1})$

$(\overline{2,5})x = (\overline{3,1}) \Leftrightarrow x = (\overline{2,5})^{-1}.(\overline{3,1})$

$\Leftrightarrow x = (\overline{5,1}).(\overline{5,2})$

$\Leftrightarrow x = (\overline{3.5,1.2}) = (\overline{15,2})$

7- • $2,4 = x \Rightarrow 10x = 24,\ x = \frac{24}{10}$

• $x = 3,265\overline{1805}$

$10^7 x = 32651805,\overline{1805} = 10^7 3 + 2651805 + 0,\overline{1805}$

$10^3 x = 3265,\overline{1805} = 10^3 3 + 265 + 0,\overline{1805}$

$\underbrace{(10^7 - 10^3)}_{b}x = \underbrace{(10^7 - 10^3)3 + 2651640}_{a}$

$\Rightarrow x = \frac{a}{b} = 3 + \frac{2651640}{10^7 - 10^3}$ //

8- • $x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow D = \left\{\sqrt{\frac{1}{4}}, -\sqrt{\frac{1}{4}}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

• $x^{-3} = \frac{27}{8} \Rightarrow (x^{-1})^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow x^{-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ $\quad D = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

• $2x^4 = 16 \Rightarrow ((2x)^2)^2 = 4^2 \Rightarrow (2x)^2 = 4 \wedge 2x = \sqrt{-4} \wedge 2x = \sqrt{4} \Rightarrow D = \{1,-1\}$

$\wedge\ \underbrace{2x^2 = -4}_{\varsigma = \emptyset}$

$(x-1)^4 = 1 \Rightarrow ((x-1)^2)^2 = 1 \longrightarrow (x-1)^2 = 1$

$\searrow (x-1)^2 = -1$

$\varsigma = \emptyset$

$x-1 = 1 \wedge x-1 = -1$

$D = \{2,0\}$

• $3x^4+81=-162 \Rightarrow 3x^4=-243 \Rightarrow x^4=-81 \Rightarrow (x^2)^2=-81 \Rightarrow D=\emptyset$

9- • $\sqrt[3]{-1}=-1$ • $\sqrt[3]{-8}=-2$ • $4^{3/2}=(4^{1/2})^3=(\sqrt{4})^3=2^3=8$ $\sqrt[3]{8}=2$

• $\left(-\frac{1}{16}\right)^{-3/4}=\left(-\frac{1}{2^4}\right)^{-3/4}=(-2^{-4})^{-3/4}=(-2)^{-4\left(-\frac{3}{4}\right)}=(-2)^3=-8$ //

- REEL SAYILAR -

$2x=3$ denkleminin $\mathbb{Z}$ de çözümü yoktur. O halde,

Rasyonel sayılar kümesi, tamsayılar kümesinden daha geniştir.

$x^2=2$ rasyonel değil idi. Bu denklemi çözmek için, reel sayılar (gerçel sayılar) kümesi tanımlanmıştır.

Tanım: Tanım kümesi: pozitif tamsayılar kümesi, değer kümesi: rasyonel sayılar kümesi olan fonksiyona rasyonel sayı dizisi denir.

Yani: $f: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}$
$n \longrightarrow f(n)=a_n$ bu diziyi sembolik olarak (a_n) ile gösteririz.

Tanım: (a_n) dizisi verildiğinde, a_n'e dizinin n. terimi (veya genel terimi) denir.

Örnek // $a_n=\frac{1}{n}$ olan dizi için $n=1 \Rightarrow a_1=1$ 1. terimdir.

$n=2 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2} \Rightarrow$ 2. terim

$n=3 \Rightarrow a_3=\frac{1}{3} \Rightarrow$ 3. "

Tanım: $n\in\mathbb{Z}^+$ ve $a\in\mathbb{Q}$ olsun. $a_n=a$ (sabit) olan diziye $[(a_n)=(a)]$ sabit dizi denir.

Örnek // $a_n=1 \Rightarrow a_1=1=a_2=\dots$

Tanım: $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ için $a_n=b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizileri eşittir denir.

Tanım: (a_n) rasyonel sayı dizisi verilsin. $\forall \varepsilon\in\mathbb{Q}^+$ için $n\geq n_0$ olduğunda $|a_n-a|<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı varsa (a_n) dizisinin limiti a sayısıdır. (veya (a_n) dizisi a'ya yakınsar) denir. Ve sembolik olarak, $\lim a_n=a$, $(a_n)\longrightarrow a$ ile gösterilir.

Tanım: Limiti sıfır olan diziye sıfır dizisi denir.

Örnek // $a_n=\frac{1}{n}$ dizisi sıfır dizisidir.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}^+$ için $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n\geq n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)\longrightarrow 0$

Tanım: (a_n) bir rasyonel sayı dizisi olsun. $\forall \varepsilon \in Q^+$ için $n \geq n_0$ ve $p \geq n_0$ olduğunda, $|a_n - a_p| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı varsa (a_n) dizisine temel dizi (Cauchy Dizisi) denir.

Teorem: Her yakınsak rasyonel sayı dizisi bir temel dizidir.

İspat// (a_n) dizisi yakınsak $\Rightarrow (a_n) \longrightarrow a \Rightarrow \forall \varepsilon_1 \in Q^+$ için $n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)$ vardır. $n_0 \in Z^+$.

$\forall \varepsilon_2 \in Q^+, p \geq n_0 \Rightarrow |a_p - a| < \varepsilon_2$

$\Rightarrow |a_n - a_p| = |a_n - a + a - a_p| = |(a_n - a) + [-(a_p - a)]| \leq |a_n - a| + |-(a_p - a)|$

$= |a_n - a| + |a_p - a| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ alırsak.

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in Q^+$ için $n \geq n_0 \wedge p \geq n_0$, $|a_n - a_p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow (a_n)$ bir temel dizidir.

Tanım: (a_n) bir rasyonel sayı dizisi olsun. $\forall n \in Z^+$ ve $\exists M \in Q^+$ için $|a_n| \leq M$ ise (a_n) dizisi sınırlıdır denir.

Teorem: Herhangi bir rasyonel sayı dizisi (a_n) olsun. (a_n) temel dizi ise sınırlıdır.

İspat// $\forall \varepsilon \in Q^+$ için $n > n_0$ ve $p > n_0$ olmak üzere $|a_n - a_p| < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = a$ olacak şekilde bir $a \in Q$ vardır.

$\Rightarrow \forall \varepsilon_1 \in Q^+, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ bağıntısı sağlanır.

$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < \varepsilon + a$

$\exists M \in Q^+$ seçilebilir ki, $M > a + \varepsilon$ ve $-M < a - \varepsilon$ yapılabilir.

$\Rightarrow -M < a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon < M \Rightarrow -M < a_n < M \Rightarrow |a_n| < M$

$\Rightarrow (a_n)$ dizisi sınırlı dizidir.

Tanım: Temel rasyonel sayılar dizilerinin kümesi T olsun. $(a_n), (b_n) \in T$ için $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$ olan bu işlemlere, temel diziler kümesinde, toplama ve çarpma işlemleri denir.

Teorem: $(T, +, \cdot)$ yapısı birimli ve değişmeli bir halkadır.

1° $\forall (a_n),(b_n) \in T, \Rightarrow \forall \varepsilon_{1,2} \in Q^+,\ n \geq n_0 \wedge p \geq n_0$ olduğundan,

$|a_n - a_p| < \varepsilon_1 \wedge |b_n - b_p| < \varepsilon_2$

$\Rightarrow |[a_n + b_n] - [a_p + b_p]| = |[a_n - a_p] + [b_n - b_p]| \leq |a_n - a_p| + |b_n - b_p| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ alınırsa

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in Q^+,\ n \geq n_0 \wedge p \geq p_0$ olduğunda $|[a_n + b_n] - [a_p + b_p]| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow (a_n + b_n) = (a_n) + (b_n) \in T$ kapalıdır.

2° $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = (b_n + a_n) = (b_n) + (a_n)$ değişme öz. vardır.

3° $(u_n) \to 0$ dizisini alalım. Ve $\forall (a_n) \in T$ için

$\Rightarrow (u_n) \in T$

$\Rightarrow (u_n) + (a_n) = (a_n) + (u_n) = (a_n)$ $(u_n) \in T$ birim elemandır. $(u_n) = (0) = e$

4° Ters eleman, $\forall (a_n) \in T \Rightarrow -(a_n) = (-a_n) \in T$

Teorem: Terimleri rasyonel sayılar olan temel dizilerin kümesi T, sıfır dizilerinin kümesi S olsun.

$(a_n), (b_n) \in T$ için $(a_n), (b_n) \in \beta \Leftrightarrow (a_n - b_n) \in S$

şeklinde tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat // $(a_n), (b_n), (c_n) \in T$ olmak üzere,

1° $\forall (a_n) \in T, \Rightarrow a_n - a_n = 0 \Rightarrow (a_n - a_n) = (0) \to 0$ yansıma özelliği vardır.

$\Rightarrow (a_n - a_n) \in S \Rightarrow [(a_n), (a_n)] \in \beta$

2° $(a_n), (b_n) \in T$ için $[(a_n), (b_n)] \in \beta \Rightarrow (a_n - b_n) \in S \Rightarrow (a_n - b_n) \to 0$

$\Rightarrow [-(a_n - b_n)] \to 0 \Rightarrow (b_n - a_n) \to 0 \Rightarrow (b_n - a_n) \in S \Rightarrow [(b_n), (a_n)] \in \beta$ simetri öz.

3° $[(a_n), (b_n)] \in \beta \wedge [(b_n), (c_n)] \in \beta \Rightarrow [(a_n - b_n) \in S \wedge (b_n - c_n) \in S]$

$\Rightarrow (a_n - b_n) \to 0 \wedge (b_n - c_n) \to 0 \Rightarrow [(a_n - b_n) + (b_n - c_n)] \to 0 + 0$

$\Rightarrow (a_n - c_n) \to 0 \Rightarrow (a_n - c_n) \in S \Rightarrow [(a_n), (c_n)] \in \beta$ geçişme öz. vardır.

β bağıntısının T den ayırdığı denklik sınıfları (a_n) elemanının denklik sınıfı $(\overline{a_n})$ ile gösterilirse,

$$(\overline{a_n}) = \{(x_n) : (x_n) \in T \wedge (x_n - a_n) \in S\}$$

Tanım: (Reel sayı): Terimleri rasyonel sayılar olan temel dizilerin kümesi T'de tanımlanan β denklik bağıntısının T'den ayırdığı denklik sınıflarının herbirine bir reel (gerçel) sayı denir. Bu sayıların kümesine de reel sayılar kümesi denir. Ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

1° $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$[(\overline{a_n}),(\overline{b_n})] \longrightarrow [(\overline{a_n})+(\overline{b_n}) = (\overline{a_n+b_n})$$

şeklindeki işleme, reel sayılar kümesindeki toplama işlemi denir.

2° $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$[(\overline{a_n}),(\overline{b_n})] \longrightarrow [(\overline{a_n}).(\overline{b_n})] = (\overline{a_n.b_n})$$

şeklindeki işleme, reel sayılar kümesindeki çarpma işlemi denir.

Teorem: $(\mathbb{R},+,\bullet)$ yapısı bir cisimdir. (ispatı yapılmayacaktır.)

Teorem: Rasyonel sayılar cismi, reel sayılar cisminin bir alt cismine izomorftur.

ispat// $\mathbb{R}' = \{(\overline{a}) : a \in Q\} \subset \mathbb{R}$ [1° Ödev: $(R',+,\bullet)$ yapısı bir cisimdir]

2° $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}'$
$a \longrightarrow f(a) = (\overline{a})$ fonksiyonu bir izomorftur. (ödev)

a) birebir ve örtendir. ?

b) $f(a+b) \overset{?}{=} f(a)+f(b)$, $f(a.b) \overset{?}{=} f(a).f(b)$

$R' \approx Q \qquad (\overline{a}) = a \qquad \Rightarrow Q \subset \mathbb{R}$

Tanım: $x,y \in \mathbb{R}$ olsun.

1 – $x+(-y)$ reel sayısına x ve y reel sayılarının farkı denir. Ve $x-y$ ile gösterilir. Bu işleme de reel sayılarda çıkarma işlemi denir.

2 – $y \neq 0$ olmak üzere $x.y^{-1}$ reel sayısına x ve y reel sayılarının bölümü (x'in, y'ye bölümü) denir ve $\frac{x}{y}$ veya $x:y$ şeklinde gösterilir. Bu işleme de rasyonel sayılarda bölme işlemi denir.

Tanım: $(F,+,\bullet)$ bir cisim olsun. Cismin sıfırı 0 ve bir alt kümesi P olsun.

a) $0 \notin P$ b) $a \in F$ ve $a \neq 0$ ise a veya $-a$ dan bir ve yalnız biri P'ye aittir. c) P kümesi F de tanımlı, toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

Önermeleri doğru ise P alt kümesine $(F,+,\cdot)$ cisminin POZİTİF KESİMİ, P'nin herbir elemanına, F'nin pozitif bir elemanı ve $(F,+,\cdot)$ cismine de SIRALI cisim denir.

Eğer $a \in F$ elemanı pozitif ise $a \in P$ ise $0<a$ veya $a>0$ şeklinde ifade edilir.

P'nin pozitif olmayan sıfırdan farklı elemanlarına, negatif elemanları denir. $b \neq 0$ ve $b \notin P$ ise $b<0$ veya $0>b$ ile gösterilir.

Tanım: Sıralı $(F,+,\cdot)$ cisminin pozitif kesimi P olsun. $a,b \in P$ için $b-a \in P$ ise a,b'den küçüktür denir ve $a<b$ şeklinde veya $b>a$ yazılır.

Eğer $a<b$ veya $a=b$ önermesi doğru ise bu durumu $a \leq b$ veya $b \geq a$ şeklinde ifade ederiz.

Tanım: $(F,+,\cdot)$ bir sıralı cisim ve $a \in F$ olsun.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \text{ ise} \\ -a, & a<0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|a|$ elemanına, a'nın mutlak değeri denir.

Teorem: $(R,+,\cdot)$ bir sıralı cisimdir.

İspat // $(\overline{a_n}) \in \mathbb{R}$ ve $(\overline{a_n}) \neq (\overline{0})$ olsun.

$\varepsilon \in Q^+$ olmak üzere $n_0 \in Z^+$ için $\mathbb{R}$'nin $n \geq n_0$ olduğunda $a_n > \varepsilon$ önermesini doğrulayan elemanlarının kümesi $\mathbb{R}^+$ olsun.

1° $(\overline{0}) \notin \mathbb{R}^+$ tanımdan dolayı.

2° $\forall (\overline{a_n}) \in \mathbb{R}$ için $\wedge (\overline{a_n}) \neq 0$ $\Rightarrow |a_n| > \varepsilon \Rightarrow (a_n > \varepsilon \vee a_n < -\varepsilon)$

$\Rightarrow a_n > \varepsilon \vee -a_n > \varepsilon$

$\Rightarrow [(\overline{a_n}) \in \mathbb{R}^+ \vee (\overline{-a_n}) \in \mathbb{R}^+]$

3° $\forall (\overline{a_n}),(b_n) \in \mathbb{R}^+$ için $\begin{cases} n>n_0 \text{ için } \exists \varepsilon \in Q,\ a_n > \varepsilon \\ n>m_0 \text{ için } \exists \delta \in Q,\ b_n > \delta \end{cases}$

$\Rightarrow \max(n_0,m_0) = N_0$ ile gösterirsek,

$n > N_0$ için $a_n > \varepsilon \wedge b_n > \delta$ dır.

$\Rightarrow (a_n + b_n > \underbrace{\varepsilon+\delta}_{>0} \wedge a_n . b_n > \underbrace{\varepsilon . \delta}_{>0}) \Rightarrow (\overline{a_n + b_n}) = (\overline{a_n}) + (\overline{b_n}) \in \mathbb{R}^+$

$\wedge (\overline{a_n . b_n}) = (\overline{a_n}) . (\overline{b_n}) \in \mathbb{R}^+$

kapalılık öz.

Sonuç olarak, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}$'nin pozitif kesimidir. $\mathbb{R}$ sıralı bir cisimdir.

Teorem: $x, y, z \in \mathbb{R}$ olsun.

1° $x<y$, $x=y$, $x>y$ önermelerinden yalnızca bir tanesi doğrudur.

2° $(x<y \wedge y<z) \Rightarrow x<z$ dir. ($\mathbb{R}$ de geçişme öz.)

3° $x<y \Rightarrow x+z<y+z$ dir.

4° $(x<y \wedge 0<z) \Rightarrow xz<yz$ dir.

5° $(x<y \wedge 0>z) \Rightarrow xz>yz$ dir.

Tanım: (Reel Sayıların Kuvvetleri):

$x \in \mathbb{R}$ olsun.

1- $x \neq 0$ ise $x^0=1$

2- $x^1=x$

3- $n \in \mathbb{Z}$ ise $x^{n+1}=x^n \cdot x$

4- $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \neq 0$ ise $x^{-n}=(x^{-1})^n$

Teorem: $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

a) n çift ise ve $a>0$ ise $x^n=a$ olacak şekilde biri pozitif ve diğeri negatif olan iki x reel sayısı vardır.

b) n çift ise ve $a<0$ ise $x^n=a$ olacak şekilde bir x reel sayısı yoktur.

c) n tek ise $x^n=a$ olacak şekilde bir tek x reel sayısı vardır.

a pozitif ise x pozitif, a negatif ise x negatiftir.

Tanım: $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

a) n çift sayı ve $a \geq 0$ olmak üzere $x^n=a$ denklemini sağlayan pozitif x reel sayısına,

b) n tek sayı ise $x^n=a$ denklemini sağlayan x reel sayısına a'nın n'inci kuvvetten kökü denir. ve $x=\sqrt[n]{a}$ veya $a^{1/n}$ şeklinde yazılır.

Tanım: $a \in \mathbb{R}$ ve $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ olsun. m ve a sayıları aynı anda sıfır değilseler,

$$a^{\frac{n}{m}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n=\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

Teorem: $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $x \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

a) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Teorem: $m, n \in Q$ ve $a, b \in IR$ olsun. Her iki yan tanımlı olmak üzere,

a) $\left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m} = a^{-m}$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ c) $a^m.a^n = a^{m+n}$ d) $(a^m)^n = a^{mn}$

Tanım: (irrasyonel sayılar):

$IR \setminus Q$ kümesinin herbir elemanına bir irrasyonel sayı denir. İrrasyonel sayılar kümesi I ile gösterilir.

Örnek 1,, $\sqrt{2}$ sayısı irrasyonel sayıdır.

Örnek 2,, $r \in Q$ ve $\alpha \in I$ olsun. $r \neq 0$ olduğuna göre aşağıdaki sayıların herbirinin bir irrasyonel sayı olduğunu gösterin.

a) $-\alpha$ b) $\alpha + r$ c) $\alpha - r$ d) αr e) $\frac{\alpha}{r}$ f) $\frac{r}{\alpha}, \alpha \neq 0$ g) $\frac{1}{\alpha}, \alpha \neq 0$

h) $\sqrt{\alpha}, \alpha \neq 0$

İspat,, b) $\alpha + r$ irrasyoneldir. ?

Aksini kabul edelim. Yani $\alpha + r$ rasyonel olsun.

$\alpha + r \in Q \Rightarrow \alpha + r = p \in Q$ olacak şekilde bir p rasyonel sayısı vardır.

$\Rightarrow \alpha = p - r \in Q \Rightarrow \alpha \in Q \Rightarrow$ hipoteze aykırıdır.

$\Rightarrow \alpha \in Q \wedge \alpha \notin Q \Rightarrow$ kabulümüz yanlıştır.

$\Rightarrow \alpha + r \notin Q \Rightarrow \alpha + r \in I$

Teorem: Herhangi iki rasyonel sayı arasında en az bir irrasyonel sayı vardır.

İspat,, $u, v \in Q$, $u \neq v$ $\Rightarrow u < v \Rightarrow v - u > 0 \Rightarrow \frac{v-u}{\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{v-u}{\sqrt{2}} + u}_{p} > u$

$\Rightarrow 1 < \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \frac{v-u}{\sqrt{2}} < v - u \Rightarrow \underbrace{\frac{v-u}{\sqrt{2}} + u}_{p} < v$, $p > u$ ve $p < v$

$\Rightarrow u < p < v \wedge p \in I$

Problemler:

1 - $a, b \in IR^+$ olmak üzere, $f: IR \to IR$ $f(x) = a^x + b^x$ ve $g(x) = \frac{f(3x)}{f(x)}$ fonksiyonları verildiğine göre $(f \circ g)$ fonksiyonu ?

2 - $|16 - 4x^2| < 1$ IR deki doğruluğu ?

3 - $|2x - 3| > 5$ " " ?

4 - $|3x-11| < 5 \wedge \frac{x^2-16}{x} < 0$ $\mathbb{R}$'deki doğruluk kümesi ?

5 - $|5-2x| < 2 \wedge x^2 < 5$ " " "

6 - $|3x+4| < |2x+5| + 1$ " " "

7 - $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}$ reel sayısını en basit biçimde yazın.

8 - $A = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R} \wedge 3y-2x=3\}$

$B = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R} \wedge \frac{4x-3y-2}{1-2x} = -3\}$

$C = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R} \wedge \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{3}\}$ ise $A \cap B \cap C = ?$

9 - $\sqrt{6}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösterin.

10 - Herhangi iki irrasyonel sayı arasında en az bir irrasyonel sayı olduğunu ispatlayın.

Çözümler :

2 - $|16-4x^2| < 1$

a) $-1 < 16-4x^2 < 1 \Rightarrow -17 < -4x^2 < -15 \Rightarrow \frac{17}{4} > x^2 > \frac{15}{4}$

$\Rightarrow \frac{17}{4} > x^2 \wedge x^2 > \frac{15}{4}$

$\Rightarrow \left(\frac{17}{4} - x^2\right) > 0 \wedge \left(x^2 - \frac{15}{4}\right) > 0$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - x\right)\left(\frac{\sqrt{17}}{2} + x\right) > 0 \wedge \left(x - \frac{\sqrt{15}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{15}}{2}\right) > 0$

b) $|16-4x^2| = \begin{cases} 16-4x^2, & 16-4x^2 \geq 0 \text{ ise} \\ -(16-4x^2), & 16-4x^2 < 0 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} 16-4x^2, & -2 \leq x \leq 2 \\ -(16-4x^2), & x < -2 \wedge x > 2 \end{cases}$

$16-4x^2 \geq 0$ ise $\Rightarrow 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow (2-x)(2+x) \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

I) $-2 \leq x < 2 \Rightarrow 16-4x^2 < 1 \Rightarrow -4x^2 < -15 \Rightarrow x^2 > \frac{15}{4} \Rightarrow \left(x < -\frac{\sqrt{15}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

$\wedge (-2 \leq x \leq 2) \Rightarrow D_1 = \left[-2, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \vee \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 2\right]$

II) $(x < -2 \wedge x > 2) \Rightarrow -16 + 4x^2 < 1 \Rightarrow 4x^2 < 17 \Rightarrow x^2 < \frac{17}{4}$

$\Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{17}}{2} < x < \frac{\sqrt{17}}{2}\right) \wedge (x < -2 \vee x > 2) \Rightarrow D_2 = \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, -2\right) \vee \left(2, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$

$D = D_1 \cup D_2 = \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$

4 - $\underbrace{|3x-11| < 5}_{D_1} \wedge \underbrace{\frac{x^2-16}{x} < 0}_{D_2}$ $D = D_1 \cap D_2$

$|3x-11| < 5$, $|3x-11| = \begin{cases} 3x-11, & 3x-11 \geq 0 \text{ ise} \\ -(3x-11), & +3x-11 < 0 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} 3x-11, & x \geq \frac{11}{3} \\ -3x+11, & x < \frac{11}{3} \end{cases}$

I - $x \geq \frac{11}{3} \Rightarrow 3x-11 < 5 \Rightarrow 3x < 16 \Rightarrow x < \frac{16}{3} \Rightarrow (x \geq \frac{11}{3} \wedge x < \frac{16}{3})$

$\Rightarrow D_1 = [\frac{11}{3}, \frac{16}{3})$, $x < \frac{11}{3} \Rightarrow D_2 = \emptyset$ $\quad D_1 \cup D_2 = [\frac{11}{3}, \frac{16}{3})$

II - $\frac{x^2-16}{x} < 0 \Rightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{x} < 0 \Rightarrow$ $x-4<0 \rightarrow x<4$, $x+4<0 \rightarrow x<-4$, $x<0 \rightarrow x<0$

yanlış (2,4) olacak

x		-4		0		4	
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{x^2-16}{x}$	$-$		$+$		$-$		$+$

$D_3 = (-\infty, -4) \cup (0, 4)$

$D = D_1 \cap D_3 = [\frac{11}{3}, \frac{16}{3}) \cap (0,4) = [\frac{11}{3}, 4)$

6- $|3x+4| < |2x+5| + 1$

$|3x+4| = \begin{cases} 3x+4, & 3x+4 \geq 0 \\ -(3x+4), & 3x+4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+4, & x \geq -\frac{4}{3} \\ -3x-4, & x < -\frac{4}{3} \end{cases}$

$\underset{(3)}{-\frac{5}{2}}, \underset{(2)}{-\frac{4}{3}} \Rightarrow -\frac{15}{6}, -\frac{8}{6}$

$\Rightarrow -\frac{15}{6} < -\frac{8}{6}$

$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5, & 2x+5 \geq 0 \\ -(2x+5), & 2x+5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+5, & x \geq -\frac{5}{2} \\ -2x-5, & x < -\frac{5}{2} \end{cases}$

I $\quad -15/6 \quad -8/6 \quad$ II

III

i- $x < -\frac{5}{2} \Rightarrow -3x-4 < -2x-5+1 \Rightarrow 0 < x \Rightarrow (x < -\frac{5}{2} \wedge 0 < x)$

$\Rightarrow D_1 = \emptyset$

ii- $-\frac{5}{2} \leq x < -\frac{4}{3} \Rightarrow -3x-4 < 2x+5+1 \Rightarrow -10 < 5x \Rightarrow -2 < x$

$\Rightarrow (-2 < x \wedge -\frac{5}{2} \leq x < -\frac{4}{3}) \Rightarrow D_2 = (-2, -\frac{4}{3})$

iii- $x \geq -\frac{4}{3} \Rightarrow 3x+4 < 2x+5+1 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow (x < 2 \wedge x \geq -\frac{4}{3})$

$\Rightarrow D_3 = [-\frac{4}{3}, 2)$

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \Rightarrow \emptyset \cup (-2, -\frac{4}{3}) \cup [-\frac{4}{3}, 2) = (-2, 2)$

KOMPLEKS (KARMAŞIK) SAYILAR

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq 0$ önermesi doğrudur.

$x^2 = -1$ önermesinin $\mathbb{R}$ deki çözümü $\emptyset$ dir.

Tanım: (Kompleks - Karmaşık - İmajiner Sayılar):

$\mathbb{C} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ olan $\mathbb{C}$ kümesine, karmaşık (kompleks) sayılar kümesi denir. $\mathbb{C}$ nin herbir elemanına bir karmaşık sayı denir.

Eğer $(x,y) \in \mathbb{C}$ ise

x: karmaşık sayının reel (gerçel kısmı)

y: " " imajiner (sanal-kompleks kısmı) denir.

$z=(x,y)$ ise $x=Re(z)$ ve $y=Im(z)$ şeklinde ifade edilir.

Örnek // $(-2,3),(0,-1),(\sqrt{2},\frac{1}{2})$ reel sayı ikililerinin herbiri bir karmaşık sayıdır.

- $z=(\sqrt{2},\frac{1}{2}) \Rightarrow \sqrt{2}=Re(z)$, $\frac{1}{2}=Im(z)$

Tanım: (eşitlik): $(x,y),(u,v)\in\mathbb{C}$ olsun.

$$(x,y)=(u,v) \Leftrightarrow (x=u \wedge y=v)$$

Tanım: $\mathbb{C}$ kümesinde,

1° $\oplus : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(x,y),(u,v) \longrightarrow (x,y)\oplus(u,v)=(x+u,y+v)$

işlemine toplama işlemi denir.

2° $\odot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(x,y),(u,v) \longrightarrow (x,y)\odot(u,v)=(xu-yv,xv+yu)$

işlemine çarpma işlemi denir.

Teorem: $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$ matematik yapısı bir cisimdir.

I- $(\mathbb{C},\oplus)$ abel grubudur.

II- $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\odot)$ abel grubudur.

III- Dağılma özelliği vardır.

I- a) $\forall(x,y)\in\mathbb{C}$, $(x,y)\oplus(u,v)=(u,v)\oplus(x,y)=(x,y)$, $(u,v)=e\in\mathbb{C}$?

$(x,y)\oplus(u,v)=(x,y) \Rightarrow (x+u,y+v)=(x,y) \Rightarrow (x+u=x)\wedge(y+v=y)$

$\Rightarrow u=0 \wedge v=0 \Rightarrow e=(u,v)=(0,0)\in\mathbb{C}$ birim eleman.

b) $z=(x,y) \Rightarrow -z=(-x,-y)\in\mathbb{C}$ ters eleman.

II- $(\mathbb{C}\setminus\{0,0\},\odot)$ abel grubudur.

a) $\forall(x,y)\in\mathbb{C}\setminus\{0,0\}$, $(x,y)\odot(u,v)=(u,v)\odot(x,y)=(x,y)$, $e=(u,v)\in\mathbb{C}$?

$(x,y)\odot(u,v)=(x,y) \Rightarrow (xu-yv,xv+yu)=(x,y)$

$\Rightarrow xu-yv=x \wedge xv+yu=y$

$\Rightarrow x^2u-xyv=x^2 \wedge y^2u+xyv=y^2$

$\Rightarrow (x^2+y^2)u=x^2+y^2$

$\Rightarrow (u=1 \wedge v=0) \Rightarrow e=(1,0)\in\mathbb{C}$ birim eleman

b) $\forall x,y \in \mathbb{C}$, $(x,y)\odot(u,v)=(u,v)\odot(x,y)=(1,0)$, $(u,v)=(x,y)^{-1}\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow (x,y)\odot(u,v)=(1,0) \Rightarrow (xu-yv,\ xv+yu)=(1,0)$

$\Rightarrow (xu-yv=1 \ \wedge\ xv+yu=0)$

$\Rightarrow ux^2-xyv=x \ \wedge\ uy^2+xyv=0$

$\Rightarrow u(x^2+y^2)=x$

$\Rightarrow u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \ \wedge\ v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow (x,y)^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)\in\mathbb{C}\setminus\{0,0\}$ ters eleman.

III - $\odot$ nın $\oplus$ üzerine dağılma özelliği.

Teorem: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$ olduğuna göre $(\mathbb{C}_{\mathbb{R}},\oplus,\odot)$ yapısı bir cisimdir.

Bu cisim $(\mathbb{R},+,\cdot)$ cismine izomorftur.

İspat// $f:\mathbb{C}_{\mathbb{R}}\longrightarrow\mathbb{R}$
$(x,0)\longrightarrow f(x,0)=x$ tanımlanıyor.

I - $(x,0),(y,0)\in\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, $f[(x,0)\oplus(y,0)]=f(x+y,0)=x+y=f(x,0)+f(y,0)$

II - $f[(x,0)\odot(y,0)]=f(xy-0.0\ ,\ x0+y0)=f(xy,0)=xy=f(x,0).f(y,0)$

III - f, 1:1 ve örtendir.

$\mathbb{R}\cong\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$

$(x,0)=x$, $(0,0)=0$, $(1,0)=1$

Tanım: (Çıkarma ve Bölme):

$z,w,\in\mathbb{C}$ olduğuna göre

1° $z\oplus(-w)$ sayısına "z ile w nın farkı" denir ve $z-w$ ile gösterilir.

Bu işlene de çıkarma işlemi denir.

2° $z\odot(w)^{-1}$ sayısına "z nin w ya bölümü" denir ve $z:w$, $\dfrac{z}{w}$ ile gösterilir.

Bu işlene de bölme işlemi denir.

Örnek// $z=(-1,2)$, $w=(3,-4)\Rightarrow -w=(-3,-(-4))=(-3,4)$

$z-w=z\oplus(-w)=(-1-3,\ 2+4)=(-4,6)$

$w^{-1}=\dfrac{1}{w}=\left(\dfrac{3}{3^2+(-4)^2},\dfrac{-(-4)}{3^2+(-4)^2}\right)=\left(\dfrac{3}{25},\dfrac{4}{25}\right)$

$\dfrac{z}{w}=z\odot w^{-1}=(-1,2)\odot\left(\dfrac{3}{25},\dfrac{4}{25}\right)=\left(-\dfrac{3}{25}-\dfrac{8}{25},-\dfrac{4}{25}+\dfrac{6}{25}\right)=\left(-\dfrac{11}{25},\dfrac{2}{25}\right)$

Teorem: (sadeleştirme): $z, u, w \in \mathbb{C}$ olduğuna göre $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ ise

$$\frac{z \odot v}{u \odot v} = \frac{z}{u}$$

İspat // $\frac{z \odot v}{u \odot v} = (z \odot v) \odot (u \odot v)^{-1} = (z \odot v) \odot (v^{-1} \odot u^{-1})$ (işlemin özelliğinden)

$$= z \odot (v \odot v^{-1}) \odot u^{-1}$$

$$= z \odot e \odot u^{-1}$$

$$= z \odot u^{-1} = \frac{z}{u}$$

Tanım: (karmaşık sayıların tam kuvvetleri):

$z \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

a) $z \neq 0$ ise $z^0 = 1$

b) $z^{n+1} = z^n \odot z$

c) $z^1 = z$

d) $z \neq 0$, $z^{-n} = (z^{-1})^n$

Tanım: $(0,1) = i$ ile gösterilir.

Teorem: $i^2 = -1$ dir.

İspat // $i^2 = i \odot i = (0,1) \odot (0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1 \Rightarrow i^2 = -1$ //

Teorem: $(x,y) \in \mathbb{C}$ olduğuna göre $(x,y) = x \oplus (i \odot y)$ dir.

İspat // $(x,y) = (x,0) \oplus (0,y)$

$$i \odot (y,0) = (0,1) \odot (y,0) = (0.y - 1.0, 0.0 + 1.y) = (0,y)$$

$\Rightarrow (x,y) = (x,0) \oplus [i \odot (y,0)]$ $\qquad (x,0) = x \wedge (y,0) = y$

$\Rightarrow (x,y) = x \oplus (i \odot y)$

Sonuç // $\oplus = +$, $\odot = \cdot$ $\Rightarrow (x,y) = x + iy$

Tanım: (x,y) kompleks sayısının $x+iy$ şeklindeki gösterimine kompleks sayının normal (cebirsel) biçimi denir.

Sonuç // $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olduğuna göre,

1- $z + w = (x+u) + (y+v)i$

2- $z - w = (x-u) + (y-w)i$

3- $z.w = (xu - yv) + (xv + yu)i$

4- $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Problemler :

1 – $(-3-4i)-(2+3i)$, $(1-2i)^3$, $\dfrac{(3+5i)}{(1-i)}$, $\dfrac{(1+i)}{i}$ kompleks sayılarını normal biçimde yazın.

2 – $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2+i}{5i}=?$, $(1-i)^4=?$

3 – $n\equiv r \pmod 4$ olduğuna göre $i^n=i^r$ olduğunu ispat edin.

4 – $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$ en basit şekilde yazın.

Çözümler :

1 – $(-3-4i)-(2+3i)=(-3-2)+i(-4-3)=-5-7i$ //

$(1-2i)^3=1^3+3(1)^2(-2i)+3.1\,(-2i)^2+(-2i)^3=-11+2i$ //

$(3+5i):(1-i)=\dfrac{(3+5i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=-1+4i$ //

2 – • $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2+i}{5i}=\dfrac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\dfrac{(2+i)(-i)}{5i(-i)}=\dfrac{(3-8)+i(4+6)}{3^2+4^2}-\dfrac{2i-1}{5}$

$=\dfrac{-5+10i}{25}-\dfrac{1-2i}{5}=\dfrac{-1+2i}{5}+\dfrac{1-2i}{5}=0$ //

• $(1-i)^4=[(1-i)^2]^2=(1-2i+i^2)^2=(1-2i-1)^2=4$ //

3 – $n\equiv r \pmod 4 \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ n=r+4k$

$\Rightarrow i^n=i^{r+4k}$

$\Rightarrow i^n=i^r.i^{4k}$ $\qquad (i^4)^k=1^k=1$

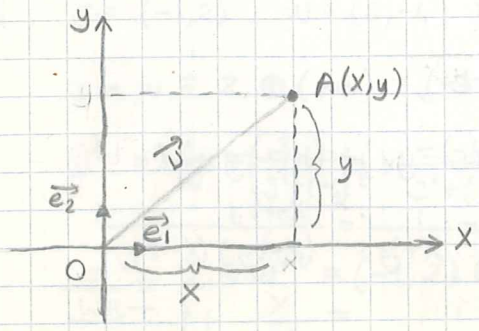
$\Rightarrow i^n=i^r.(i^4)^k \Rightarrow i^n=i^r$ //

4 – $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$ $\qquad 30\equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow i^{30}=i^2=-1$

$19\equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow i^{19}=i^3=i^2.i=-i$

$=\dfrac{3.(-1)-(-i)}{2i-1}=\dfrac{-3+i}{2i-1}=\dfrac{(-3+i)(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)}=\dfrac{(3+2)+i(6-1)}{1+4}=\dfrac{5(1+i)}{5}=1+i$ //

Karmaşık Sayıların Geometrik Gösterimi



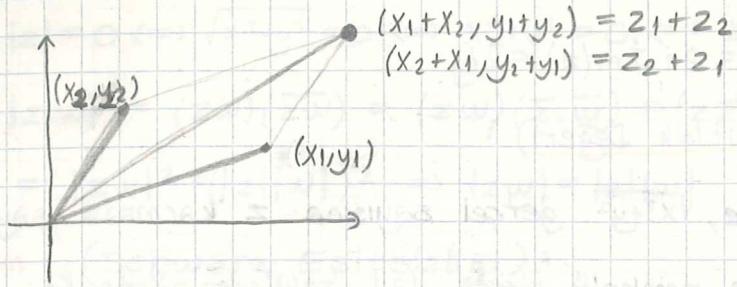
$\vec{v}=(x,y)=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$

$z=(x,y)$ Bu düzleme kompleks düzlem denir.

OX ekseni : Reel (gerçel) eksen.

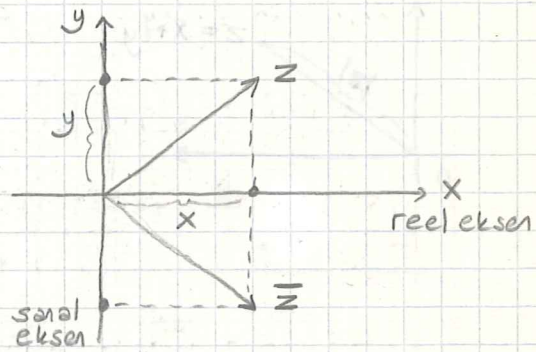
OY " : İmajiner (sanal) " .

$z = x+iy$ kompleks sayısını grafikle çizmek için, bileşenleri x ve y olan iki nokta alırız. Kesişimleri kompleks sayı olan bir nokta bulunur.



Tanım: (eşlenik) : "$z = x+iy$ kompleks (karmaşık) sayısının eşleniği" diye $x-iy$ karmaşık sayısına denir ve $\bar{z}$ ile gösterilir.

$z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy$ dir.



Örnek// $z = 3-2i$ ise $\bar{z} = 3+2i$ dir.

Teorem: $z, w \in \mathbb{C}$ olduğuna göre,

1- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

2- $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$

3- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad (z \neq 0)$

4- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0)$

5- $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

6- $z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

İspat// $z = x+iy$ ve $w = u+iv$ olsun.

1- $\overline{z+w} = \overline{(x+u)+i(y+v)} = (x+u)-i(y+v) = (x-iy)+(u-iv) = \bar{z}+\bar{w}$

2- $z.w = (x+iy)(u+iv) = xu-yv+i(xv+yu)$

$\overline{z.w} = (xu-yv)-i(xv+yu)$

$\bar{z}.\bar{w} = (x-iy)(u-iv) = xu-yv+i(-xv-yu) = xu-yv-i(xv+yu)$

$\Rightarrow \overline{zw} = \bar{z}.\bar{w}$

3- $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$

$\Big\} \; \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

4- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z.\frac{1}{w}\right)} = \bar{z}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \bar{z}\,\frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

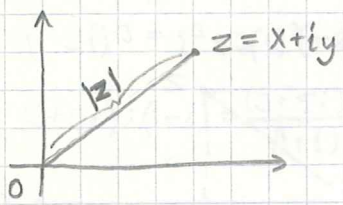
5- $z+\bar{z} = (x+iy)+(x-iy) = 2\,Re(z) = 2x$

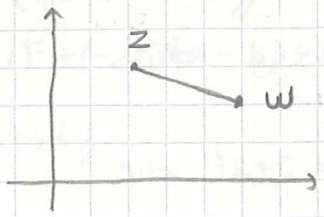
6- $z-\bar{z} = (x+iy)-(x-iy) = 2i\,Im(z) = 2iy$

Tanım: (Karmaşık Sayının Mutlak Değeri):

$z = x+iy$ olduğuna göre, $\sqrt{x^2+y^2}$ gerçel sayısına z karmaşık sayısının mutlak değeri (modülü) denir ve sembolik olarak $|z|$ şeklinde gösterilir.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ "z modül" veya "modül z" diye okunur.





(İki nokta arasındaki uzaklık)

$$|z-w| = |x+iy-(u+iv)|$$
$$= |(x-u)+i(y-v)|$$
$$|z-w| = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

Teorem: $z, w \in \mathbb{C}$ olsun.

1- $|z| = |\bar{z}|$

2- $|z|^2 = z.\bar{z}$

3- $|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$

4- $|z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$

5- $|z| \geq 0$

6- $|z| = 0 \iff z = 0$

7- $|z.w| = |z|.|w|$

8- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

İspat// $z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy$

2- $\left.\begin{array}{l} |z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |z|^2 = x^2+y^2 \\ z.\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow |z|^2 = z.\bar{z}$

3- $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2+0} = \sqrt{|x|^2}$

$\Rightarrow |z| \geq |x| \geq x \Rightarrow |z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$

6- $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow z=0$

7- $|z.w|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (zw)(\bar{z}.\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2$

$\Rightarrow |zw|^2 = (|z||w|)^2 \Rightarrow |zw| = |z||w|$

Teorem : (Schwarz Eşitsizliği) :

$i \in \{1,2,3,4,\ldots,n\}$ için $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right).\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2\right)$$

Teorem : (Üçgen Eşitsizliği) :

$z, w \in \mathbb{C}$ için

1- $|z+w| \leq |z| + |w|$

2- $\big||z|-|w|\big| \leq |z-w|$

İspat// 1- $z = x+iy$ $w = u+iv$ olsun.

$$|z+w|^2 = |(x+u)+i(y+v)|^2 = (x+u)^2+(y+v)^2$$

$$= (x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(xu+yv)$$

$(xu+yv)^2$

$n=2$ $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = u$, $y_2 = v$

$$\left(\sum_{i=1}^{2} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\right)$$

$$\Rightarrow (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$$

$$(xu+yv)^2 \leq (x^2+y^2)(u^2+v^2)$$

$$(xu+yv) \leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}$$

$$\Rightarrow |z+w|^2 \leq (x^2+y^2)+(u^2+v^2) + 2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}$$

$$\Rightarrow |z+w|^2 \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{u^2+v^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow |z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$$

$$\Rightarrow |z+w| \leq |z|+|w|$$

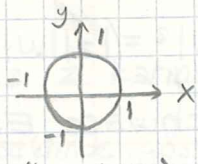
7.6.1994
SALI

Örnek // $z \in \mathbb{C}$ olduğuna göre aşağıdaki bağıntıları gerçekleyen nokta kümelerini karmaşık düzlemde gösterin.

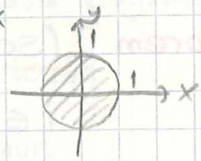
a) $|z|=1$ b) $|z|<1$ c) $|z|\leq 1$ d) $z+\bar{z}=1$ e) $z-\bar{z}=i$ f) $z+\bar{z}=|z|^2$

a- $\{(x,y): x,y \in \mathbb{R} \wedge |z|=1\} = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2=1\}$

$z = x+iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2=1$

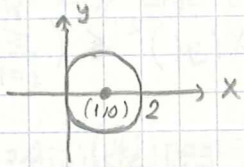


c- $|z| \leq 1$ (çemberin üzerindeki ve içindeki noktaların kümesidir.)



f- $z+\bar{z}=|z|^2$

$\{(x,y): 2x = x^2+y^2\} = \{(x,y): (x-1)^2+y^2=1\}$



$M(1,0)$ $r=1$

Örnek // Aşağıdaki kümeleri karmaşık düzlemde gösterin.

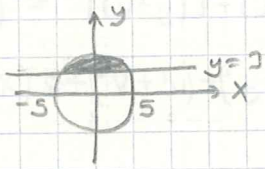
a) $\{z: z \in \mathbb{C}, |z|=5 \text{ ve } \operatorname{Im}(z)=3\} = M$

b) $\{z: z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z)=1\}$

c) $\{z: z \in \mathbb{C}, |z-(1+i)|=3\}$

a- $z = x+iy$, $|z|=5 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=5 \Rightarrow x^2+y^2=5^2$

$\operatorname{Im}(z)=3 \Rightarrow y=3$



$M = \{(x,y): x^2+y^2=5^2 \wedge y=3\}$

$= \{(-4,3),(4,3)\}$

Örnek // Aşağıdaki karmaşık sayılardan herbiri için $|z|$, $\bar{z}$, $z.\bar{z}$, $\frac{z}{\bar{z}}$ ifadelerini bulun.

a) $3+2i$ b) $-i$ c) 1 d) $\frac{1}{3+2i}$ e) $i^{15}-1$

a- $z=3+2i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$\Rightarrow \bar{z} = 3-2i$

$\Rightarrow z.\bar{z} = |z|^2 = 13$

$\Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} = \frac{3+2i}{3-2i} = \frac{(3+2i)^2}{13} = \frac{5+12i}{13}$ //

Örnek // b belirli bir karmaşık sayı a ve c gerçel sayılar ve $a \neq 0$ ise $a\,z.\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$ bağıntısını gerçekleyen z noktalarının karmaşık düzlemde bir çember üzerinde olduğunu ispatlayın.

İspat// $z = x+iy$, $b = p+iq$ $\quad b\bar{z} = w$ diyelim. $\overline{b.\bar{z}} = \bar{w} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{w} = \bar{b}.\bar{\bar{z}} = \bar{b}.z$

$\Rightarrow b.\bar{z} + \bar{b}.z = w + \bar{w} = 2Re(w)$

$w = b.\bar{z} = (p+iq)(x-iy)$

$= px + qy + i(-py + qx)$

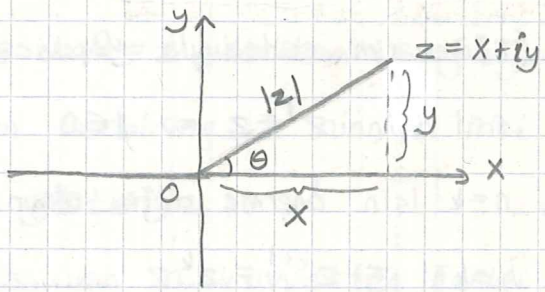
$Re(w) = px + qy$

$a.(x^2+y^2) + 2(px+qy) + c = 0 \Rightarrow x^2+y^2 + 2\frac{p}{a}x + 2\frac{q}{a}y + \frac{c}{a} = 0$

(Çember denklemidir.)

Karmaşık Sayıların Kutupsal Biçimi

$z = (x,y) = x+iy \in \mathbb{C}$



$\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ $\quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}$

$\Rightarrow x = |z|\cos\theta \wedge y = |z|\sin\theta$

$\Rightarrow |z| = x+iy$

$= |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

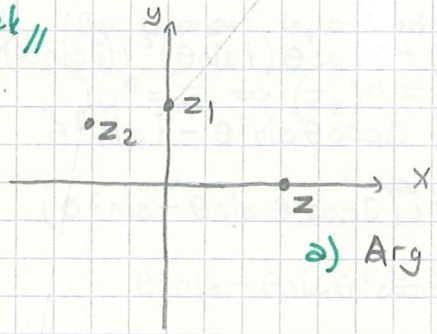
$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$ (z nin kutupsal biçimi)

θ : z'nin argümenti (açısı) dır.

$0 \leq \theta < 2\pi$ olan açıya z nin asıl argümenti denir. $[0, 2\pi)$

z'nin argümenti özel olarak Arg z, ($[0,2\pi)$ de) genel olarak arg z ile gösterilir.

Örnek//



a) $Arg\, z = 0$ $\quad$ b) $Arg\, z_1 = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ c) $\frac{\pi}{2} < Arg\, z_2 < \pi$

Örnek// Aşağıdaki kompleks sayıların argümentlerini bulalım.

a) 1 $\quad$ b) -1 $\quad$ c) i $\quad$ d) $-i$ $\quad$ e) $-1-i = z$

a) $0°$ $\quad$ b) π $\quad$ c) $\pi/2$ $\quad$ d) $3\pi/2$

e) $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Teorem: $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha) \wedge w=|w|(\cos\theta+i\sin\theta)$ olduğuna göre

a) $z.w=|z|.|w|[\cos(\alpha+\theta)+i\sin(\alpha+\theta)]$

b) $\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}[\cos(\alpha-\theta)+i\sin(\alpha-\theta)]$ dır.

İspat // a) $z.w=|z|.|w|(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=|z|.|w|[\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta+i(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)]$$

$$=|z|.|w|[\cos(\alpha+\theta)+i\sin(\alpha+\theta)]$$

Teorem: (kompleks sayıların tam kuvvetleri – De Moivre Formülü):

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ve $n\in Z^+$ olduğuna göre ;

$\boxed{z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)}$ dır

İspat // (Tümevarım metoduyla yapılacaktır.)

$n=1$ için $z^1=z \Rightarrow 1\in D$

$n=k$ için önerme doğru olsun. $z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$

$n=k+1 \Rightarrow z^{k+1}=z^k.z$

$$=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\,r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z^{k+1}=r^{k+1}[\cos k\theta.\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta+i(\cos k\theta\sin\theta+\sin k\theta\cos\theta)]$$

$$=r^{k+1}[\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta] \Rightarrow k+1\in D$$

Örnek // $\cos 3\theta$ ve $\sin 3\theta$ 'yı, $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ cinsinden yazınız.

$\left.\begin{matrix}n=3\\r=1\end{matrix}\right\}$ $\cos 3\theta+i\sin 3\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$

$$=\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$$

$$=\cos^3\theta+i\,3\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta \wedge \sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$

Ödev // $\cos 5\theta$ ve $\sin 5\theta$ 'yı, $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ cinsinden hesaplayın.

Teorem: $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ ve $n\in Z^+$ olduğuna göre

$$z^{-n}=(z^{-1})^n=|z|^{-n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]$$

İspat // z^{-1} yerine değerini yazalım.

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{|z|}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= |z|^{-1}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

$$\Rightarrow z^{-n} = \{|z|^{-1}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]\}^n$$

$$\Rightarrow z^{-n} = |z|^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$$

Tanım: Katsayıları $\mathbb{C}$ den seçilen bir polinom $P(X)$ olsun. $P(X)=0$ denklemine bir polinom denklemi, denklemi sağlayan her bir karmaşık sayıya denklemin bir kökü (çözümü) denir.

Teorem: Katsayıları $\mathbb{C}$ den seçilen bir polinom denkleminin en az bir kökü vardır. (İspatı yapılmayacaktır.)

Tanım: $z \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olduğuna göre $w^n = z$ denklemini sağlayan (gerçekleyen), w kompleks sayılarının herbirine z nin, n'inci kuvvetten bir kökü denir. Ve $z^{1/n}$ ile gösterilir.

Teorem: Sıfırdan farklı bir karmaşık sayının n. kuvvetten farklı n tane kökü vardır.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olduğuna göre $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ olmak üzere bu kökler,

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]}$$ şeklindedir.

İspat // (Bu teorem ispatlanmayacaktır. Gerçekten $w^n = z$ olduğunu görelim.)

$$w^n = z \Rightarrow (z_k)^n = \left[|z|^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]^n$$

$$= |z|\left[\cos n\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin n\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$$

$$= |z|(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$$

$$= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = z$$

Örnek // $w^4 = -1 \Rightarrow z = -1 = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad |z| = 1$

$\cos\theta = -1 \quad \sin\theta = 0 \qquad z = (\cos\pi + i\sin\pi) = \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)$

$\pi = \theta$

$$w^4 = z \Rightarrow w = z^{1/4}$$

$$z^{1/4} = 1^{1/4}\left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right]$$

$k=0,\quad w_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$k=1,\quad w_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$k=2,\quad w_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$k=3,\quad w_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

Örnek // $\operatorname{Arg}(-3+3i) = ?$

$|-3+3i| = 3\sqrt{2} \qquad z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \left\{\cos\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$-3+3i = 3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \qquad \operatorname{Arg}(-3+3i) = \frac{3\pi}{4}$ //

Örnek // $z = (2+2\sqrt{3}i)$ karmaşık sayısını kutupsal biçimde yazınız.

$|z| = 2\sqrt{1+3} = 4 \qquad z = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right]$

Örnek // $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)^{100}$ karmaşık sayısını $x+iy$ şeklinde yazınız.

$z = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \qquad |z| = \frac{1}{2}\sqrt{3+1} = 1$

$z = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$

$\Rightarrow z^{100} = \cos 100\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) + i\sin 100\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$

$\frac{50\pi}{3} = (48+2)\frac{\pi}{3} = 16\pi + \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow z^{100} = \cos\frac{50\pi}{3} + i\sin\frac{50\pi}{3}$

$\Rightarrow z^{100} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow z^{100} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z^{100} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ //

Ödev // (-1) sayısının küpköklerini bulun.

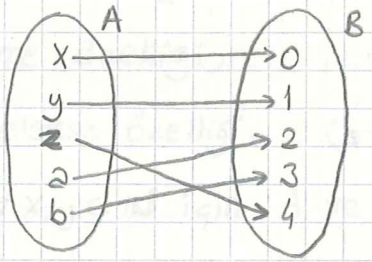
$(-1+i)$ " " " . $\sqrt[3]{1+i}$

$z^5 = -32$ denkleminin $\mathbb{C}$ deki köklerini bulun.

(s: 108 'den devam)

Tanım: Sonlu kümeler ailesinde tanımlanan eşit güçlü olma bağıntısına göre elde edilen ve 0,1,2,3,.... ile gösterilen denklik sınıflarının herbirine bir doğal sayı denir. Bu sayıların kümesine de doğal sayılar kümesi denir.

Doğal sayılar kümesinin bir alt kümesine eşit güçlü olan kümeye sayılabilir küme denir. Sayılabilir olmayan kümeye de sayılamayan küme denir. $A=\{x,y,z,a,b\}$, $B=\{0,1,2,3,4\}$ ise,



teşkil edilen fonksiyon 1:1 ve örtendir.

$$f: A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B$$

Örnek // Doğal sayılar kümesinin kendisi sayılabilir mi?

Sonuç: Doğal sayılar kümesi sonsuz kümedir.

Tanım: $S=\{1,2,3,....\} \subseteq \mathbb{N}$

Doğal sayılar kümesi ile sayma sayıları kümesi arasında eşit güçlülük teşkil ediliyorsa, doğal sayılar kümesi sonsuz kümedir.

Tanım: Bir A kümesi $\{1,2,3,....,n\}$ kümesine eşit güçlüyse n'ye A kümesinin eleman sayısı denir.

Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır.

Tanım: (Doğal Sayılar Kümesinde Toplama İşleni):

$x,y \in \mathbb{N}$, x sayısını temsil eden A kümesi ve y sayısını temsil eden ve A ile ayrık olan B kümesinin birleşiminin bulunduğu denklik sınıfına x ve y doğal sayılarının toplamı denir.

$$x \in \overline{A} \text{ ve } y \in \overline{B} \text{ ve } A \cap B = \emptyset \Rightarrow x+y = \overline{A \cup B}$$

Örnek // 2 ve 3 sayılarının toplamını bulalım.

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{A}=2 & A=\{a,b\} \\ \overline{B}=3 & B=\{x,y,z\} \end{array}\right\} x+y=\overline{A\cup B}=\{a,b,x,y,z\}=2+3=5$$

Teorem: $\{\mathbb{N}, +\}$ 'nın aşağıdaki özellikleri vardır:

1- $\forall x,y \in \mathbb{N}$, $x+y \in \mathbb{N}$ (kapalılık)

2- $\forall x,y \in \mathbb{N}$, $x+y = y+x$ (değişme)

3- $\forall x,y \in \mathbb{N}$, $(x+y)+z = x+(y+z)$ (birleşme)

4- $x, 0 \in \mathbb{N}$, $x+0 = 0+x = x$ (birim eleman)

İspat// $\forall x,y \in \mathbb{N}$, $x = \overline{A} \wedge y = \overline{B}$ ve $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $z = \overline{C}$

1- $x+y = \overline{A \cup B} \in \mathbb{N}$

2- $x+y = \overline{A \cup B} = \overline{B \cup A} = y+x$

3- $(x+y)+z = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = x+(y+z)$

4- $x, 0 \in \mathbb{N}$; $x = \overline{A}$ ve $0 = \emptyset$

$x+0 = 0+x = x$ (doğal sayılar kümesinin birim elemanı sıfırdır.)

Teorem: Sonlu iki kümenin kartezyen çarpımı da sonludur.

İspat ① A ve B iki küme ve bunlardan birisi boş ise $A \times B = \emptyset$ olur.

$\Rightarrow$ $\emptyset$ sonlu ise $A \times B$ de sonludur.

② $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olsun.

$\Rightarrow$ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ olsun.

$\Rightarrow$ $A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\}$

$\Rightarrow$ $A \times B = (\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\}) \times B$

$\Rightarrow$ $A \times B = (\{a_1\} \times B) \cup (\{a_2\} \times B) \cup \ldots \cup (\{a_n\} \times B)$

$\Rightarrow$ $A \times B = \{a_1\} \times B \sim B$

Herhangi bir kümeyle bu kümenin herhangi bir elemanının kartezyen çarpımı eşit güçlü bir kümedir denir.

$$f: B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} \{a\} \times B$$

$$x \longrightarrow f(x) = \{a, x\}$$

$\Rightarrow$ $\{a_1\} \times B$ sonludur.

$\Rightarrow$ $\{a_2\} \times B$ //

$\Rightarrow$ $\{a_3\} \times B$ //

Tanım: (Çarpma):

x ve y iki doğal sayı olsun. $x=\overline{A}$ ve $y=\overline{B}$ olmak üzere $A\times B$ nin bulundu-ğu denklik sınıfına x ve y doğal sayılarının çarpımı denir.

"$x.y$" ile gösterilir. $x.y = A\times B$ dir.

Teorem: Doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin şu özellikleri vardır:

1- Kapalılık özelliği,

2- Değişme özelliği,

3- Birleşme özelliği,

4- Birim eleman özelliği.

İspat, 1- $\forall x,y\in\mathbb{N}$ için A ve B sonlu kümesi ve $x=\overline{A} \wedge y=\overline{B}$

$\Rightarrow A\times B$ sonludur.

$\Rightarrow xy = \overline{A\times B} \in \mathbb{N}$

2- $\forall x,y\in\mathbb{N}$, $x.y = \overline{A\times B} = \overline{B\times A}$

$$f: A\times B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B\times A$$

$$(u,v) \longrightarrow f(u,v)$$

fonksiyonunun 1:1 ve örten olduğunu ispata çalışalım.

$\forall (u_1,v_1),(u_2,v_2)\in A\times B$, $f(u_1,v_1)=f(u_2,v_2) \Rightarrow (u_1,v_1)=(u_2,v_2)$

$\Rightarrow (u_1=u_2)\wedge(v_1=v_2) \Rightarrow (u_1,v_1)=(u_2,v_2)$

sonuç olarak, $\overline{A\times B} = \overline{B\times A}$

3- $\forall x,y\in\mathbb{N}$, $(xy)z = \overline{(A\times B)\times C} = \overline{A\times(B\times C)} = x(yz)$

$x=\overline{A}$ $y=\overline{B}$ $z=\overline{C}$

4- $x,1\in\mathbb{N}$, $x=\overline{A} \wedge 1=\{\overline{a}\}$

$x.1 = A\times\{a\} = \{a\}\times A$ (eşit güçlüdürler, dolayısıyla denklik sınıfları aynıdır.) $x.1 = 1.x = x$ (1, çarpma işleminde birim elemandır.)

Teorem: $\forall x,y\in\mathbb{N}$ için,

1- $x=y \wedge z=t \Rightarrow (xz=yt)$

2- $x,y,z\in\mathbb{N}$, $x=y \Rightarrow xz=yz$

3- $\forall x,y,z\in\mathbb{N}$, $(xy=yz)\wedge y\neq 0 \Rightarrow x=z$

4- $\forall x,y\in\mathbb{N}$, $xy=0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$

5- $x(y+z) = xy+xz$

6- $(x+y)z = xz+yz$

İspat// 1- $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow x = \overline{A}, y = \overline{B}, z = \overline{C}, t = \overline{D}$

$(x = y \wedge z = t)$ $\quad \overline{A} = \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{D} \Rightarrow (A \sim B \wedge C \sim D)$

$\Rightarrow \exists f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} B \wedge \exists g : C \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} D$

$xz = \overline{A \times C} \wedge yt = \overline{B \times D}$

$xz = yt \Rightarrow \overline{A \times C} = \overline{B \times D}$ (Eşit güçlüdürler, yani aralarında 1:1 ve örten fonksiyonlar vardır. O halde bu fonksiyonu bulacak olursak;)

$f : A \times C \longrightarrow B \times D$

$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (f(x), g(y))$ (Bu fonksiyonu daha önceden tanımlanış ve 1:1 ve örten olduğunu göstermiştik.)

$xz = (\overline{A \times C} = \overline{B \times D}) = yt$

i- $(x = y) \wedge (z = t) \Rightarrow (xz = yt)$

ii- $x = y \Rightarrow xy = yz$

3- $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $(xy = yz \wedge y \neq 0) \Rightarrow x = z$

$x = \overline{A} \wedge y = \overline{B} \wedge z = \overline{C}$ $\quad xy = yz \wedge y \neq 0 \Rightarrow B \neq \emptyset$

(Aksini farzedelim, $x \neq z$ olsun. $\overline{A} \neq \overline{C} \Rightarrow$ iki kümenin denklik sınıfı birbirine eşit değilse, 1:1 ve örten fonksiyon bulunmaz, çünkü eşit güçlü değildirler.)

$\overline{A} \neq \overline{C} \Rightarrow \exists C_1 \subseteq C$, $\overline{A} = \overline{C}$

Sonuç olarak, öyle bir f fonksiyonu vardır ki,

$f : A \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} C$

$xy = yz \Rightarrow \overline{A \times B} = \overline{B \times C} = \overline{C \times B}$

$f : A \times B \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} C_1 \times B$

$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (f(x), y)$

Sonuç olarak, $A \times B \sim C_1 \times B \Rightarrow A \times B \sim C \times B \wedge A \times B \sim C_1 \times B$

$\Rightarrow C \times B \sim A \times B \wedge A \times B \sim C_1 \times B$ (simetri öz.)

$\Rightarrow C \times B \sim C_1 \times B \wedge C_1 \times B \subseteq C \times B$ $\quad C \times B$ kümesi bir özalt kümesine eşit güçlüdür. O halde $C \times B$ sonsuzdur. $\Rightarrow x = z$ bağıntısı vardır.

4 – $\forall x,y \in \mathbb{N}$, $(xy=0) \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$

$(x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Rightarrow \exists A,B \quad x=\overline{A} \; y=\overline{B} \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

olacak biçimde A ve B kümeleri vardır.

$\Rightarrow \exists u \in A \wedge \exists v \in B$, $(u,v) \in A \times B \Rightarrow A \times B \neq \emptyset$

O halde $A \times B \neq \emptyset \Rightarrow \overline{A \times B} = 0 \Rightarrow xy \neq 0$

sonuç olarak, $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ ise $xy \neq 0$ dır.

Bunun karşıt tersi $xy=0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$ doğrudur.

Tanım: $x,y \in \mathbb{N}$ $x=\overline{A}$ ve $y=\overline{B}$ olmak üzere $A \subset B$ ise,

"x doğal sayısı, y doğal sayısından küçüktür" denir. Ve

$x<y$ şeklinde yazılır. x küçük y diye okunur. Eğer $A \subseteq B$ ise

x küçüktür veya eşittir denir ve $x \leq y$ yazılır.

$\underbrace{x<y \;,\; y<x}_{\text{kuvvetli}}$ $\qquad$ $\underbrace{x \leq y \;,\; y \leq x}_{\text{zayıf}}$ (doğal sayılarda eşitsizliklerden)

Teorem: $x,y \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $x<y$, $y<x$, $x=y$ önermelerinden ancak birisi doğrudur.

İspat// $x,y \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x=\overline{A} \wedge y=\overline{B} \Rightarrow A,B$ kümeleri için

$A \subset B$, $B \subset A$, $A=B$ önermelerinden ancak birisi doğrudur.

Teorem: $x,y \in \mathbb{N} \wedge x+y=0 \Rightarrow (x=0 \wedge y=0)$ olur.

İspat// $x,y \in \mathbb{N}$ ve $x+y=0$ olsun. $\Rightarrow x=\overline{A} \wedge y=\overline{B} \wedge x+y=0$

$\Rightarrow x+y=\overline{A \cup B} \wedge A \cap B = \emptyset$ dir.

$\Rightarrow x+y=\overline{A \cup B} \wedge A \cap B = \emptyset \wedge x+y=0 \Rightarrow \overline{A \cup B}=0 \Rightarrow A \cup B = \emptyset$

$\Rightarrow A=\emptyset \wedge B=\emptyset$ olmalıdır.

$\Rightarrow (x=\overline{A}=\emptyset=0 \wedge y=\overline{B}=\emptyset=0)$ olur.

Teorem: Bir x doğal sayısının y sayısından küçük olması için $(y \in \mathbb{N})$ gerek ve yeter şart, $x+k=y$ olacak şekilde bir tek $k \neq 0$ doğal sayısının varolmasıdır.

Sonuç olarak, $x<y \Leftrightarrow x+k=y \wedge k \neq 0$ olmalıdır.

ispat// 1 $\Rightarrow$: $x, y \in \mathbb{N} \wedge x < y$ olduğunu varsayalım. Buna göre

$\Rightarrow x = \overline{A} \wedge y = \overline{B}$ olacak şekilde bir A ve B kümeleri vardır ki,

x ve y, A ile B nin denklik sınıflarına eşittir. Ayrıca $x < y$ olduğuna göre

$A \subset B$ dir. Buna göre öyle bir $\exists C \neq \emptyset$ vardır ki,

$A \cup C = B$ dir. (C kümesi $B \setminus A$ ile bulunur.)

$\Rightarrow A \cap C = \emptyset \wedge A \cup C = B$

Sonuç olarak, $\overline{A \cup C} = \overline{B} \Rightarrow x + k = y,\ k = \overline{C}$

Eğer $x < y$ ise en az bir k doğal sayısı vardır. k'nın tek olduğunu ispatlamak için aksini ispat edeceğiz.

$k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ gibi iki sayı varsa, bu taktirde;

$x + k_1 = y \wedge x + k_2 = y$ olur $\Rightarrow x + k_1 = x + k_2 \Rightarrow k_1 = k_2$ dir.

2 $\Leftarrow$: $x + k = y \wedge k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \overset{?}{\Rightarrow} x < y$ (iddianın doğru olmadığını farzedelim.)

i- $y < x$ doğru olabilir. Veya

ii- $x = y$ doğru olabilir.

Önce kabul edelim ki, $y < x$ olsun.

i- $\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ y + r = x$ (gerek şarttan dolayı)

$\wedge\ x + k = y \wedge k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (hipotezden)

(2. ifadedeki y değerini 1. ifadede yerine yazarsak)

$\Rightarrow (x + k) + r = x \Rightarrow x + (k + r) = x \Rightarrow k + r = 0$ olur.

$\Rightarrow (k = 0 \wedge r = 0)$ dır. doğru değildir.

Bu bir çelişkidir. Öyleyse $x = y$ nin doğrulluğuna bakalım.

ii- $x = y \Rightarrow x = x + k \wedge k \neq 0 \Rightarrow k = 0$ olur. Bu da bir çelişkidir.

Doğru değildir. Daha önce söylediğimiz ifade de $x < y$, $x > y$, $x = y$ önermelerinden yalnız birisi doğru olacağına göre ve $y < x$, $x = y$ önermeleri yanlış olduğuna göre $x < y$ önermesi kesinlikle doğrudur. Yani,

$$x < y \Leftrightarrow x + k = y \wedge k \neq 0 \text{ dır.}$$

Teorem : $\forall x,y,z,w \in \mathbb{N}$ için,

1- $x<y \iff x+z<y+z$

2- $x<y \wedge z<w \Rightarrow x+z<y+w$

3- $x<y \wedge z\neq 0 \Rightarrow xz<yz$

4- $x<y \wedge z<w \Rightarrow xz<yw$

ispat // 1- $x<y \Rightarrow \exists k\in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ x+k=y \Rightarrow y+z=(x+k)+z$

$\Rightarrow (x+z)+k=y+z \wedge k\neq 0 \Rightarrow x+z<y+z$

4- $x<y \wedge z<w \Rightarrow (\exists k\neq 0,\ x+k=y) \wedge (\exists r\neq 0,\ z+r=w)$

$\Rightarrow (x+k)(z+r)=yw \Rightarrow xz+\underbrace{k(z+r)+(x+k)r}_{t}=yw$

$\Rightarrow xz+t=yw \wedge t\neq 0 \Rightarrow xz<yw$

Teorem : $\forall x,y\in \mathbb{N}$ için $(x<y \Rightarrow x+1\leq y)$

ispat // $x<y \Rightarrow k\in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ y=x+k$

$\Rightarrow \exists t\in \mathbb{N},\ k=t+1 \wedge y=x+k$

$\Rightarrow y=x+(t+1) \Rightarrow y=(x+1)+t \wedge t\in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (t=0$ olursa $y=x+1) \vee (t\neq 0$ olursa $x+1<y) \Rightarrow x+1\leq y$ olur.

Teorem : 0 ile 1 doğal sayıları arasında hişbir doğal sayı yoktur.

ispat // Bu önermenin doğruluk kümesi D olsun.

$D=\{x : x\in \mathbb{N} \wedge 0<x<1\}$

$=\{x : x\in \mathbb{N} \wedge 0<x \wedge x<1\}$ $\quad (x<y \Rightarrow x+1\leq y)$

$=\{x : x\in \mathbb{N} \wedge 1\leq x \wedge x<1\}$ bu önerme yanlıştır.

$D=\{x : x\in \emptyset\}=\emptyset$ Bu önermenin doğruluk kümesi $\emptyset$ dir.

Yani 0 ile 1 arasında doğal sayı yoktur.

- Tümevarım İlkesi -

$\mathbb{N}_a$ (Doğal sayıların bir alt kümesi olsun.)

Buradaki a bu kümenin en küçük elemanıdır.

1- $a\in \mathbb{N}_a$ $\qquad$ 2- $\forall k\in \mathbb{N}_a \Rightarrow k+1\in \mathbb{N}_a$ $(k>a)$

Uygulaması: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $P(n)$ önermesi verilliyor. Ve doğrulugunun ispatlanması isteniyor.

1- $n=a$ için $P(a)$ doğrudur. (ispat)

2- $\forall k \in \mathbb{N} \wedge k > a$ için $P(k)$ doğrudur. (kabul edisin)

3- $P(k+1)$'in doğrulugu. ($P(k)$'nın doğrulugundan yararlanılarak ispatlanıyor.)

Sonuç olarak;

$P(n)$ önermesi, a'dan büyük veya eşit her doğal sayı için doğrudur deniliyor.

Örnek,, Sayma sayıları kümesi S olmak üzere,

$\forall n \in S$ için $1+2+3+4+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu ispatlayalım.

$n=1$ için, doğrulugunu ispatlamak için her iki tarafa n yerine 1 yazılır.

$1 \overset{?}{=} \frac{1.2}{2} \Rightarrow 1=1$ $n=1$ için önerme doğrudur.

$n=k$ için, önerme doğru olsun, yani;

$1+2+3+\dots+(k-1)+k = \frac{k(k+1)}{2}$ olsun.

$n=k+1$ için,

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Sonuç olarak, k+1 için önerme doğrudur. O halde tümevarım ilkesine göre

$\forall n \in S$ için $1+2+3+4+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$ önermesi doğrudur.

Tanım: $x \in \mathbb{N}$ olsun.

a- $x \neq 0$ ise $x^0 = 1$

b- $x^1 = x$

c- $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\{1\}$ için $x^{n+1} = x^n . x$

d- x^n ye x'in n. kuvveti denir. ($n \in \mathbb{N}$)

(özel olarak; x^2: x kare, x^3: x küp diye okunur.)

Örnek,, $2^3 = 2^2 . 2 = (2.2).2 = 8$

$2^0 = 1$, $0^1 = 0$, $0^5 = 0$, $0^0 =$ tanımsız.

Teorem: $x, y, m, n \in \mathbb{N}$ olsun.

a- $x^m, x^n \in \mathbb{N}$ ise $x^m . x^n = x^{m+n}$ dir.

b- $x^n, (x^m)^n \in \mathbb{N}$ ise $(x^m)^n = x^{m.n}$ dir.

c- $(x.y)^n \in \mathbb{N}$, $(xy)^n = x^n . y^n$ dir.

d- $x \neq 0$ ve $m \geq n$ ise, $x^m : x^n = x^{m-n}$ dir.

İspat // a- $x^m, x^n \in \mathbb{N}$ olsun. $(x=0 \Rightarrow m \neq 0 \wedge n \neq 0)$

$x=0$ ve $x \neq 0$ hallerini ayırt edelim

i- $x \neq 0$ olsun. $x^m . x^n = x^{m+n}$ önermesini doğrulayan n doğal sayılarının kümesi D olsun. Acaba $1 \in D$ midir?

Sol tarafta n yerine 1 yazarak ispatlarız.

$x^m . x^1 = x^m . x = x^{m+1}$

$n=1$ için önerme doğrudur. O halde $1 \in D$ dir.

$n=k$ için $k \in D$ olsun.

$$
\begin{aligned}
x^m . x^{k+1} &= x^m (x^k . x) && \text{(tanımdan)} \\
&= (x^m . x^k) x && \text{(birleşme öz.)} \\
&= x^{m+k} x && \text{(kabulden dolayı)} \\
&= x^{(m+k)+1} && \text{(tanımdan)} \\
&= x^{m+(k+1)} && \text{(birleşme öz.)}
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak $x^m . x^{k+1} = x^{m+(k+1)} \Rightarrow k+1 \in D$ dir.

Tümevarım ilkesinden dolayı, $x^m . x^n = x^{m+n}$ dir.

Tanım: (Çıkarma):

$a, b \in \mathbb{N}$ olsun. $x+a=b$ olacak şekilde bir x doğal sayısı varsa bu sayıya b ve a doğal sayılarının farkı denir. (b'den a'nın farkı denir.) Ve $x = b-a$ şeklinde yazılır. Farkı bulmak için yapılan işlene de, doğal sayılarda çıkarma işlemi denir.

Tanım: (Bölme):

$a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $ax=b$ olacak şekilde bir x doğal sayısı varsa,

bu sayıya b'nin a'ya bölümü denir. Bölümü bulmak için yapılan işlene de doğal sayılarda bölme işlemi denir.

$aX = b \Rightarrow X = b : a$ şeklinde gösterilir.

Eğer $aX = b$ ise bu duruma "a, b'yi böler" denir. Ve senbolik olarak a/b şeklinde yazılır. Sonuç olarak,

$$a/b \Leftrightarrow a,b \in \mathbb{N}, \exists X \in \mathbb{N}, aX = b$$

Teorem: Doğal sayılar kümesinde $(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ bölünebilme bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır. (İspatı yapılmayacaktır.)

Problemler:

1- $\sum_{i=1}^{n} (2i) = n(n+1)$ 2- $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$ 3- $\sum_{i=1}^{n} (3i-2) = \frac{1}{2} n(3n-1)$

4- $\sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ 5- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

6- $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ 7- $\forall n \in S,\ 2^n > n$

8- $\forall n \in \mathbb{N},\ 3/n^3 + 2n$ 9- $\forall n \in \mathbb{N},\ 4/3^{2n} - 1$

10- $n \geq 4, n \in \mathbb{N},\ n! > 2^n$ 11- $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$

özdeşliklerinin doğru olduğunu ispatlayınız.

Çözümler:

1- $n=1$ için $\sum_{i=1}^{1} (2i) = 2.1 = 2$ $\longleftrightarrow$ $1(1+1) = 2$ doğrudur.

$n=k$ için doğru olsun, yani;

$\sum_{i=1}^{k} (2i) = k(k+1)$ olsun. $n = k+1$, $\sum_{i=1}^{k+1} (2i) \overset{?}{=} (k+1)(k+2)$

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i) = 2.1 + 2.2 + 2.3 + \dots + 2k + 2(k+1) = \sum_{i=1}^{k} (2i) + 2(k+1)$$

$$= k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

$(k+1)$ için önerme doğru olduğundan, tüm önerme doğru olur.

2- $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) \overset{?}{=} n^2$

$n=1$ için $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = (2.1-1) = 1$ $\longleftrightarrow$ $1^2 = 1$ $1 \in D$

$n=k$ için doğru olsun.

$$\sum_{i=1}^{k} (2i-1) = k^2$$

$\Rightarrow (2.1-1)+(2.2-1)+(2.3-1)+\dots+(2k-1)=k^2$ olsun.

$\Rightarrow 1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$ olduğunu kabul ediyoruz.

$n=k+1$, $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)\overset{?}{=}(k+1)^2$ olduğunu ispatlayacağız.

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=\underbrace{(2.1-1)+(2.2-1)+(2.3-1)+\dots+(2k-1)}_{k^2}+\underbrace{2((k+1)-1)}_{2k+1}$$

$$=k^2+(2k+1)$$

$$=k^2+2k+1=(k+1)^2 \quad ,(k+1)\in D$$

Önermenin doğruluğu böylece ispatlanmış oldu.

3- $\sum_{i=1}^{n}(3i-2)\overset{?}{=}\frac{1}{2}n(3n-1)$

$n=1$ için $\sum_{i=1}^{1}(3i-2)=(3.1-2)=1 \qquad \frac{1}{2}1(3.1-1)=\frac{1}{2}.2=1$ doğrudur.

$n=k$ için $\sum_{i=1}^{k}(3i-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$ doğru olsun.

$$=(3.1-2)+(3.2-2)+\dots+(3k-2)+\frac{1}{2}k(3k-1) \text{ olsun.}$$

$n=k+1$ için doğruluğuna bakalım,

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1)\overset{?}{=}\frac{1}{2}(k+1)[3(k+1)-1]$$

$$\overset{?}{=}\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-2)=(3.1-2)+(3.2-2)+\dots+(3k-2)+[3(k+1)-2]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(3i-2)+3k+1$$

$$=\frac{1}{2}k(3k-1)+3k+1$$

$$=\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k+3k+1$$

$$=\frac{3}{2}k^2+\frac{5}{2}k+1$$

$$=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2) \quad // \quad k+1\in D$$

$$\begin{array}{r|l} 3k^2+5k+2 & k+1 \\ \hline \mp 3k^2 \mp 3k & 3k+2 \\ \hline 2k+2 & \\ \mp 2k \mp 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Önerme $k+1$ için doğru olduğundan, doğru bir önermedir.

4- $\forall n\in\mathbb{N}$, $3/n^3+2n$

$n=1$ için $1^3+2.1=3 \Rightarrow 3/3$ doğrudur.

$n=k$ için $3/k^3+2k$ doğru olsun.

$n=k+1$ için $3/(k+1)^3+2(k+1)$?

$$(k+1)^3+2(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+2k+2=\underbrace{(k^3+2k)}_{3q}+(3k^2+3k+3)$$

$$=3q+3k^2+3k+3=3(q+k^2+k+1) \quad , \quad q+k^2+k+1\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow 3/(k+1)^3+2(k+1) \quad k+1\in D$ önerme doğrudur.

5- $n \geq 4, n \in \mathbb{N}, n! > 2^n$ olduğunu ispatlayalım.

$n=4$ için, $4! = 4.3.2.1 = 24 \quad 2^4 = 16 \quad 4! > 2^4$ doğrudur.

$n=k$ için, $k! > 2^k$ doğru olsun.

$n=k+1$ için, $(k+1)! > 2^{k+1}$ olduğunu ispatlayalım.

$(k+1)! = k!(k+1) > 2^k(k+1)$ (kabulden dolayı)

$\Rightarrow 2^k(k+1) > 2^k.2$ ($k+1$ yerine ondan daha küçük olan 2 yazılarak.)

$\Rightarrow (k+1)! > 2^{k+1}$ olur. Verilen önerme doğrudur.

6- $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\sum_{i=1}^{n} i(i!) \overset{?}{=} (n+1)! - 1$

$n=1$ için, $\sum_{i=1}^{1} i(i!) = 1(1!) = 1 \quad (1+1)! - 1 = 1 \quad 1 \in D$

$n=k$ için, $\sum_{i=1}^{k} i(i!) = (k+1)! - 1$ doğru olsun.

$n=k+1$ için, $\sum_{i=1}^{k+1} i(i!) = 1(1!) + 2(2!) + \dots + k(k!) + (k+1)(k+1)!$

$= \sum_{i=1}^{k} i(i!) + (k+1)(k+1)!$

$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$

$= (k+1)!(1+k+1) - 1$

$= (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1 \quad k+1 \in D$ //

Doğal Sayıların Çeşitli Tabanlara Göre Yazılışı

Teorem: $X \neq 0$ olmak üzere, $X \in \mathbb{N}$ sayısı ve $a > 1$ olmak üzere bir a doğal sayısı verilsin. $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$ olmak üzere $i \neq n$ için $0 \leq X_i < a$ ve $i=n$ için $0 < X_i < a$ olan $n+1$ tane $X_0, X_1, \dots, X_n$ doğal sayıları vardır. Bu doğal sayılar yardımıyla bir X doğal sayısı tek türlü olarak;

$$X = X_0 + X_1 a + X_2 a^2 + \dots + X_n a^n$$ şeklinde yazılır.

İspat // Varlığın ispatı;

Bu şekilde yazılabilen X doğal sayılarının kümesi D olsun.

$a^0 = 1 \Rightarrow 1.a^0 = 1 \quad X_n a^n = 1 \quad n = 0 \Rightarrow 1 \in D$

$2, 3, \dots, X \in D$ olsun. $\Rightarrow X+1 \overset{?}{\in} D$

$1 < a, \; a < a^2, \; a^2 < a^3, \dots, a^n < a^{n+1}$

$\Rightarrow a^n < X+1 < a^{n+1}$ $X+1$ sayısını a^n e bölelim.

(Tanımdan sonra devam edecek.)

Tanım : (Kalanlı Bölme) :

a ve b doğal sayıları verildiğinde, $a = bq + r \wedge 0 \leq r < b$ olacak şekilde q ve r doğal sayılarını bulma işlemine, a'nın b'ye kalanlı olarak bölümü denir. Bu işleme de doğal sayılarda kalanlı bölme denir.

Örnek // $5,25 \Rightarrow 25 = 5.5 + 0$

$17,9 \Rightarrow 17 = 9.1 + 8 \quad , \quad 0 < 8 < 9$

$9,17 \Rightarrow 9 = 17.0 + 9 \quad , \quad 0 < 9 < 17$

İspatın devamı ; $\Rightarrow x+1 = a^n q + r$ olacak şekilde q ve $r \in \mathbb{N}$ vardır.

$\wedge\ 0 \leq r < a^n \quad \Rightarrow r < x+1$ dir. (sonuç)

$\Rightarrow x+1 - r > 0 \Rightarrow a^n q > 0 \Rightarrow q = x_n \Rightarrow a^n q = x_n a^n$

biçiminde ifade edebiliriz.

$\Rightarrow x+1 = x_n a^n + r \quad \wedge \quad r < x+1 \Rightarrow r \in D$

$\Rightarrow r = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_k a^k$ olarak yazılabilir.

$\Rightarrow x+1 = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_k a^k + x_n a^n$

$x+1 = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_k a^k + \underbrace{0 a^{k+1} + 0 a^{k+2} + \dots + x_{n-1} a^{n-1}}_{0} + x_n a^n$

$\Rightarrow x+1 = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n \Rightarrow x+1 \in D$ olur.

Tekliğin İspatı ;

Aksini farzederek,

$x = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n$

$y = y_0 + y_1 a + y_2 a^2 + \dots + y_n a^n$ iki şekilde yazılsın.

$\Rightarrow x = x_0 + a(\underbrace{x_1 + x_2 a + \dots + x_n a^{n-1}}_{q_1}) \wedge y = y_0 + a(\underbrace{y_1 + y_2 a + \dots + y_n a^{n-1}}_{q_2})$

$\Rightarrow x = x_0 + a q_1 \wedge y = y_0 + a q_2 \Rightarrow x_0 = y_0 \Rightarrow q_1 = q_2 = q$

$\Rightarrow q = x_1 + x_2 a + \dots + x_n a^{n-1} \wedge q = y_1 + y_2 a + \dots + y_n a^{n-1}$

$\Rightarrow q = x_1 + a(x_2 + \dots + x_n a^{n-2}) \wedge q = y_1 + a(y_2 + \dots + y_n a^{n-2})$

$\Rightarrow x_1 = y_1 , x_2 = y_2 , \dots , x_n = y_n$ elde edilir.

Tanım: $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$ olsun. $i \neq n$ için $0 \leq x_i < a$ ve $i=n$ için $0 < x_i < a$ olmak üzere sıfırdan farklı x doğal sayısının,

$x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n$ şeklinde yazılmasına "a tabanına göre açılımı" denir. $(x_n x_{n-1} \dots x_2 . x_1 . x_0)_a$ şeklinde yazılır.

Sonuç olarak;

$$x = (x_n x_{n-1} \dots x_3 . x_2 . x_1 . x_0)_a = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n$$ yazılır.

Örnek// $a=2$ ise sembolleri 0,1 dir.

$a=10$ ise 0,1,2,...,8,9 sembolleri kullanılır.

$a=12$ ise 0,1,2,...,8,9,u,v sembolleri kullanılır.

Not: x doğal sayısını a tabanına göre yazarken, burada kullanılan sayılar $x_n, x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0$ doğal sayılarına özel semboller bulunmalıdır.

Bir x sayısını a tabanına göre yazdığımızı farzedelim.

$$x = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = (x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0)_a$$

$$x = x_0 + a(\underbrace{x_1 + x_2 a + \dots + x_n a^{n-1}}_{q}) \qquad (q: \text{bölümdür.})$$

$$x = x_0 + aq \qquad (x_0: x\text{'in } a\text{'ya bölümünden elde edilen I. kalandır.})$$

$$q = x_1 + x_2 a + x_3 a^2 + \dots + x_n a^{n-1} \Rightarrow q = x_1 + a(\underbrace{x_2 + x_3 a + \dots + x_n a^{n-2}}_{q_1})$$

$$\Rightarrow q = x_1 + a q_1 \qquad (x_1: q \text{ nun } a \text{ ya bölümündeki II. kalandır.})$$

$$\Rightarrow q_1 = x_2 + x_3 a + \dots + x_n a^{n-2} = x_2 + a(x_3 + \dots + x_n a^{n-3})$$

x_2: III. kalan $\quad x_3$: IV. kalan

Örnek// 97 sayısını 5 tabanında yazınız.

$$\begin{array}{r|l} 97 & 5 \\ \hline -5 & 19 \;|\; 5 \\ 47 & -15 \;|\; 3 \\ -45 & 4 \\ \hline 2 & \end{array} \qquad 97 = (342)_5$$

Örnek// 12 sayısını 12 tabanına göre yazınız.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 12 \\ \hline -12 & 1 \;|\; 12 \\ 0 & -0 \;|\; 0 \\ & 1 \end{array} \qquad 12 = (10)_{12}$$

Örnek: 3000 sayısını 12 tabanında yazınız.

```
3000 | 12
-24  |-----
 60  | 250 | 12
-60  |-24  |-----
 (0) |(10) | 20 | 12
     |     -12 | 1 | 12
     |     (8) -0 |---
     |         (1) | 0
```

10 = u dersek

$3000 = (18u0)_{12}$

Çeşitli Sayı Tabanlarına Göre İşlemler

Örnek: $(342)_5$ sayısını 10 tabanında yazınız.

$3.5^2 + 4.5 + 2.5^0 = 75 + 20 + 2 = 97$

$(342)_5 = 97$

Toplama İşlemi =

$(231)_8 + (64)_8 = (315)_8$

Çıkarma İşlemi =

$(4172) - (277) = 3673)_8$

Çarpma İşlemi =

```
  (2032)4
x  (312)4
---------
  10130
  2032
+12222
---------
1313310
```

$(1313310)_4$

Bölme İşlemi =

```
(21220111)3 | (10212)3
-21201      |---------
 00012111   | (2001)3
  -10212
   0(1122)3
```

Karekök Alma :

```
     | 15
√225 | 1X2 → 25
-1   |       x 5
---  |       ---
125  |       125
-125
----
   0
```

```
√(24041)6 | 135
          | (1)6 X (2)6 → (23)6
-1        |               x (3)6
---       |               -----
(140)6    |               (113)6
-(113)6   |
-------   | (13)6 X (2)6 → (305)6
02341     |                x (5)6
-2341     |                ------
-----     |                (2341)6
    0     |
```

10 tabanına çevirmeden bir sayıyı başka bir tabana göre yazma :

Örnek // $(3420)_6$ 7 tabanında yazınız.

Önce 10 tabanında verilen 7 sayısını 6 tabanında yazarız.

$$\begin{array}{r|l|l} 7 & 6 & \\ \hline -6 & 1 & 6 \\ \hline 1 & -0 & 0 \\ & 1 & \end{array} \qquad 7 = (11)_6$$

$$\begin{array}{r|l|l|l|l} (3420)_6 & (11)_6 & & & \\ \hline -33 & (310)_6 & (11)_6 & & \\ 12 & -22 & (24)_6 & (11)_6 & \\ -11 & (50)_6 & -(22)_6 & (2)_6 & (11)_6 \\ X_0 = (10)_6 & (44)_6 & X_2 = (2)_6 & -(0)_6 & (0)_6 \\ & X_1 = (2)_6 & & X_3 = (2)_6 & \end{array}$$

$$(3420)_6 = \left[(2)_6\,(2)_6\,(2)_6\,(10)_6 \right]_{(11)_6} = (2226)_7$$

Problemler :

1- $(3467)_8$, 7 tabanında yazınız.

$(6u12)_{12}$, 11 " " .

$(100101001)_2$, 10 " " .

2- Çeşitli tabanlara göre verilen aşağıdaki işlemleri yapın.

$(10232)_4 + (3133)_4 = ?$

$(6716)_8 - (717)_8 = ?$

$(7804)_{12} + (uv29)_{12} + (v00u)_{12} = ?$

$(23141)_5 - (11123)_5 = ?$

$(78216)_9 \cdot (348)_9$

$(9uv)_{12} \cdot (u.6)_{12} = ?$

3- 10 tabanına göre yazmadan $(24341)_5$ sayısının $(131)_5$ sayısına bölümündeki kalan nedir?

4- $(151) = (227)_t \Rightarrow t = ?$

5- $\sqrt{(21301)_4}$, $\sqrt{(562)_7} = ?$

6- $\{[(10000110)_2 + (10001)_2] - [(101)_2 \cdot 11]\} : (1001)_2 = ?$

7- $a = n^2+1 \Rightarrow n^2+2$, n^2+2n , $(n^2+2)^2$ sayılarını a tabanına göre yazınız?

8- $(xy)_{10} + (18)_{10} = (yx)_{10}$ ve $(xy)_{10} = (yx)_7$ ise $(xy)_{10} = ?$

9- $t > 2 \Rightarrow (121)_t$ sayısı bir tamkare midir?

10- $(x_1x_2x_3x_3x_2x_1)_a$ sayısının $a+1$ ile bölündüğünü gösteriniz.

11- $(abcabc)_{10}$ sayısının $(1001)_{10}$ sayısına bölündüğünü gösteriniz.

Çözümler :

1- • $(\overset{3}{3}\overset{2}{4}\overset{1}{6}\overset{0}{7})_8 = 8^0.7 + 8^1.6 + 8^2.4 + 8^3.3 = (1847)_{10}$

$$\begin{array}{r|l} 1847 & 7 \\ \hline -14 & 263 \\ \hline 44 & -21 \\ \hline -42 & 53 \\ \hline 27 & -49 \\ \hline -21 & 4 \\ \hline 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 263 & 7 \\ \hline 37 & 37 \\ \hline -35 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & 7 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline -0 & 0 \\ \hline 5 & \end{array}$$

$(5246)_7 = (3467)_8$ //

• $(6\upsilon12)_{12}$

$$\begin{array}{r|l} (6\upsilon12)_{12} & (V)_{12} \\ \hline -(65)_{12} & 756 \\ \hline (51)_{12} & \\ -(47)_{12} & \\ \hline (62)_{12} & \\ -(56)_{12} & \\ \hline X_0 = (8)_{12} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} (756)_{12} & (V)_{12} \\ \hline -(74)_{12} & (81)_{12} \\ \hline (16)_{12} & \\ -(V)_{12} & \\ \hline X_1 = (7)_{12} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} (81)_{12} & (V)_{12} \\ \hline -(74)_{12} & (8)_{12} \\ \hline X_2 = (9)_{12} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} (8)_{12} & (V)_{12} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline X_3 = (8)_{12} & \end{array}$$

$(6\upsilon12)_{12} = [(8)_{12}(9)_{12}(7)_{12}(8)_{12}](11)_{12} = (8978)_{11}$

• $(\overset{8}{1}\overset{7}{0}\overset{6}{0}\overset{5}{1}\overset{4}{0}\overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{1})_2 = 2^0.1 + 2^1.0 + 2^2.0 + 2^3.1 + 2^4.0 + 2^5.1 + 2^6.0 + 2^7.0 + 2^8.1$

$= (297)_{10}$

2-
$$\begin{array}{r} (10232)_4 \\ +\ (3133)_4 \\ \hline (20031)_4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (7804)_{12} \\ (\upsilon V29)_{12} \\ +\ (V00\upsilon)_{12} \\ \hline (2573V)_{12} \end{array} \qquad \begin{array}{r} (6716)_8 \\ -\ (717)_8 \\ \hline (5777)_8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (78216)_9 \\ \times\ (348)_9 \\ \hline (702843)_9 \\ (365866)_9 \\ +\ (256650)_9 \\ \hline (131237613)_9 \end{array}$$

3-
$$\begin{array}{r|l} (24341)_5 & (131)_5 \\ \hline -(131)_5 & (140)_5 \\ \hline (1124)_5 & \\ -(1124)_5 & \\ \hline 0(1)_5 & \end{array}$$

Kalan : $(1)_5$

4- $(151)_{10} = (\overset{2}{2}\overset{1}{2}\overset{0}{7})_t \Rightarrow 7t^0 + 2t^1 + 2t^2 \Rightarrow 7 + 2t + 2t^2 = 151$

$\Rightarrow 2t^2 + 2t = 144$

$\Rightarrow t^2 + t = 72$

$\Rightarrow t(t+1) = 72$

$\Rightarrow t = 8$ //

5-

$$\begin{array}{l|l} & (121)_4 \\ \hline \sqrt{(21301)_4} & (1)_4 \times (2)_4 \longrightarrow (22)_4 \\ -(1)_4 & \qquad\qquad\qquad \times (2)_4 \\ (113)_4 & \qquad\qquad\qquad (110)_4 \\ -(110)_4 & \\ (301)_4 & (12)_4 \times (2)_4 \longrightarrow (301)_4 \\ -(301)_4 & \qquad\qquad\qquad \times (1)_4 \\ 0 & \qquad\qquad\qquad (301)_4 \end{array}$$

(sürekli 2 ile çarpılır.)

$\sqrt{(21304)_4} = (121)_4$

$$\begin{array}{l|l} & (23)_7 \\ \hline \sqrt{(562)_7} & (2)_7 \times (2)_7 \longrightarrow (43)_7 \\ -(4)_7 & \qquad\qquad\qquad \times (3)_7 \\ (162)_7 & \qquad\qquad\qquad (162)_7 \\ -(162)_7 & \\ 0 & \end{array}$$

$\sqrt{(562)_7} = (23)_7$

8- $a = n^2+1$

$$\begin{array}{r|l} n^2+2 & n^2+1 \\ \hline \mp n^2 \mp 1 & 1 \\ \hline X_0 = 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & n^2+1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline X_1 = 1 & \end{array}$$

$(n^2+2)_{10} = (11)_a$

9- $t>2$ $\quad (\overset{2}{1}\overset{1}{2}\overset{0}{1})_t = t^0.1 + t^1.2 + t^2.1 = 1+2t+t^2 = (t+1)^2$ tam karedir.

10- $(\overset{5}{X_1}\overset{4}{X_2}\overset{3}{X_3}\overset{2}{X_3}\overset{1}{X_2}\overset{0}{X_1})_a = X_1a^0 + X_2a + X_3a^2 + X_3a^3 + X_2a^4 + X_1a^5$

$= X_1 + X_2a + X_3a^2 + X_3a^3 + X_2a^4 + X_1a^5$

$= X_1(1+a^5) + X_2a(1+a^3) + X_3a^2(1+a)$

$= X_1(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1) + X_2a(a+1)(a^2-a+1) + X_3a^2(1+a)$

$= (a+1)\left[X_1(a^4-a^3+a^2-a+1) + X_2a(a^2-a+1) + X_3a^2\right]$

$= a+1 \,/\, (X_1X_2X_3X_3X_2X_1)$

Devamı (S: 109) da ...

(S: 118 'den devam :)

Tamsayılar Kümesinde Bölme :

Tanım: $a,b \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq 0$ olsun. $b = aX$ olacak biçimde bir X tamsayısı varsa a'ya b'nin bir çarpanı (veya, b'ye a'nın bir katı), X sayısına; b'nin a'ya bölümü denir. Ve $X = b : a$ yazılır.

a sayısı, b nin bir çarpanı ise b sayısı a sayısına bölünebiliyor denir ve a/b olarak yazılarak anlatılır. "a böler b" diye okunur.

Uyarı // Tamsayılar kümesi bölme işlemine göre kapalı değildir. Neden ?

Tanım: $a,b \in \mathbb{Z}$ olsun. x ve y herhangi tamsayılar olduğuna göre $ax+by$ tamsayısına a ve b tamsayılarının bir lineer toplamı denir.

1. Teorem: $a,b,c,x,y \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$(a/b \wedge a/c) \Rightarrow a/(bx+cy)$$

İspat// $(a/b \wedge a/c) \Rightarrow \exists k,t \in \mathbb{Z},\ (b=ak,\ c=at)$

$$\Rightarrow bx+cy = (ak)x+(at)y$$

$$\Rightarrow bx+cy = a(kx+ty)$$

$$\Rightarrow a/kx+ty \Rightarrow a/bx+cy$$

2. Teorem: $a,b \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$(a/b \wedge b/a) \Rightarrow (b=a \vee b=-a)$$

İspat// $(a/b \wedge b/a) \Rightarrow \exists k,t \in \mathbb{Z},\ b=ak$ ve $c=bt$

$$\Rightarrow ab = abkt$$

$$\Rightarrow 1=kt \Rightarrow k=t=1 \vee k=t=-1$$

Öte yandan $(b=ak$ ve $k=1) \Rightarrow b=a$

$(a=bt$ ve $t=-1) \Rightarrow b=-a$

3. Teorem: $\forall x,y,z \in \mathbb{Z},\ (x/y \wedge y/z) \Rightarrow x/z$

İspat// $(x/y \wedge y/z) \Rightarrow \exists k,t \in \mathbb{Z},\ y=kx$ ve $z=ty$

$$\Rightarrow \exists k,t \in \mathbb{Z},\ z=t(kx)=(kt)x$$

$$\Rightarrow x/z$$

Uyarı// $\mathbb{Z}$'de yukarıda tanımlanmış olan "/" bölme bağıntısı, denklik bağıntısı olmadığı gibi sıralama bağıntısı da değildir.

Tamsayılar Kümesinde Kalanlı Bölme:

Tanım: $a,b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olsun. a'yı b'ye kalanlı olarak bölmek demek, $a=bq+r$ ve $0 \leq r < |b|$ olacak biçimde bir q tamsayısı ile bir r doğal sayısını bulmak demektir. Bu durumda a'ya bölünen, b'ye bölen q'ya bölüm, r'ye kalan denir.

Örnek // $25 = 6.\underline{4} + \underline{1}$ ve $0 < 1 < 6$ olduğundan, 25 sayısının 6'ya bölümünde bölüm 4, kalan 1'dir.

Örnek // $14 = (-4)(\underline{-3}) + \underline{2}$ ve $0 < 2 < |-4|$ olduğundan, 14 sayısının -4 ile bölümünde, bölüm -3, kalan 2 dir.

(Devamı s: 119'da...)